

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



EQUI-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

SEVİL DAĞDEVİREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

PROF. DR. SEVDA AKDAĞ

SİNOP - 2025

TEZ KABUL

Sevil DAĞDEVİREN tarafından hazırlanan “EQUI-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK” başlıklı bu çalışma, 17.06.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi	İmza
Üye (Danışman)	Prof. Dr. Sevda AKDAĞ Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi	İmza
Üye	Prof. Dr. Özlem GİRGİN ATLIHAN Pamukkale Üniversitesi / Fen Fakültesi	İmza

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Hüseyin Turan ARAT

.....

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarımı kabullendiğimi beyan ederim.



Sevil DAĞDEVİREN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EQUI-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

SEVİL DAĞDEVİREN

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. SEVDA AKDAĞ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm ise temel tanım ve teoremlerin yer aldığı kısmı oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak, yoğunluk kavramı temel alınarak istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış ardından alışılmış düzgün yakınsaklık ile istatistiksel düzgün yakınsaklığı içeren equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca bu kavramlar kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verilmiştir. Daha sonra, lacunary istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık kavramlarına yer verilmiş, bu tanımlar temel alınarak lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık ve λ -equi istatistiksel yakınsaklık tanıtılarak bu kavramlar yardımı ile Korovkin tipi teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Abel ve Borel toplanabilme yöntemlerini içeren kuvvet serisi metodu tanıtılmış ardından kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık tanıtılarak bu kavramın istatistiksel yakınsaklık ile karşılaştırılamayacağı örneklerle açıklanmıştır. Ayrıca fonksiyon dizileri için kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel noktasal yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık ve equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılmıştır. Daha sonra kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Bunun yanı sıra süreklilik modülü yardımıyla elde edilen P_p -equi istatistiksel yakınsama oranı verilmiş ve son olarak kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bir Voronovskaya tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER:İstatistiksel Yakınsaklık; Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık; Equi-İstatistiksel Yakınsaklık, Pozitif Lineer Operatör; Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi; Kuvvet Serisi Metodu Anlamında Equi-İstatistiksel Yakınsaklık

Temmuz 2025, 61 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESIS

EQUI-STATISTICAL CONVERGENCE

SEVİL DAĞDEVİREN

SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. SEVDA AKDAĞ

This thesis consists of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter constitutes the part where the fundamental definitions and theorems are presented. In this chapter, firstly, statistical convergence is defined based on the concept of density, and then the concept of equi-statistical convergence, which includes the classical uniform convergence and statistical uniform convergence, is defined. Furthermore, Korovkin-type approximation theorems are given using these concepts. Afterwards, the concepts of lacunary statistical convergence and λ -statistical convergence are included, and based on these definitions, lacunary equi-statistical convergence and λ -equi-statistical convergence are introduced, and Korovkin-type theorems are given with the help of these concepts. In the third chapter, the power series method, which includes the Abel and Borel summability methods, is introduced and then statistical convergence in the sense of the power series method is defined, and it is explained with examples that this concept cannot be compared with statistical convergence. In addition, for sequences of functions, the concepts of statistical pointwise convergence, statistical uniform convergence, and equi-statistical convergence in the sense of the power series method are introduced. Afterwards, a Korovkin-type approximation theorem is obtained by means of the concept of equi-statistical convergence in the sense of the power series method. Moreover, the rate of P_p -equi-statistical convergence is obtained via the modulus of continuity is given, and finally, a Voronovskaya-type approximation theorem obtained using equi-statistical convergence in the sense of the power series method.

KEYWORDS: Statistical Convergence; Lacunary Statistical Convergence; Equi-Statistical Convergence; Positive Linear Operator; Korovkin Type Approximation Theorem; Equi-Statistical Convergence in the Sense of the Power Series Method

July 2025, 61 Page

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimin hazırlanmasında bilgi, deneyim ve desteğiyle her aşamada yanımda olan, bilimsel rehberliğiyle yolumu aydınlatan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Sevdâ Akdağ’a en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin yönlendirmeleri, eleştirel katkıları ve akademik birikimi, bu çalışmanın şekillenmesinde belirleyici olmuştur.

Tez süreci boyunca sabırları, anlayışları ve sevgileriyle beni her zaman destekleyen kıymetli aileme teşekkür ederim. Özellikle sevgili eşim, yol arkadaşım, Öğretim Görevlisi Işık Dağdeviren’e; hem akademik bakış açısıyla sunduğu katkılar hem de her koşulda yanımda oluşu için minnettarım.

Hayatımın en kıymetli varlıkları olan sevgili kızlarım İdil Umay ve Leyla Piraye’ye, çalışmalarım sırasında gösterdikleri sabır ve neşeleriyle bu süreci anlamlı kıldıkları için sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca, her zaman yanımda olan, bana inanan, sevgi ve emekleriyle bugünlere gelmemi sağlayan sevgili annem Ayşe Öztürk’e ve sevgili babam İsmail Öztürk’e en derin şükranlarımı sunarım.

Bu tez, yalnızca akademik bir çalışmanın değil; aynı zamanda ailemle birlikte verdiğimiz ortak bir emeğin ürünüdür.

Sevil DAĞDEVİREN

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL.....	ii
ETİK BEYANI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. İstatistiksel Yakınsaklık.....	3
2.2. Equi-İstatistiksel Yakınsaklık.....	6
2.3. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri	9
2.4. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık.....	17
2.5. Lacunary Equi-İstatistiksel Yakınsaklık.....	22
2.5.1. Lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi.....	25
2.6. λ -İstatistiksel Yakınsaklık.....	27
2.7. λ -Equi İstatistiksel Yakınsaklık.....	29
3. MATERYAL VE YÖNTEM	33
4. BULGULAR.....	34
4.1. Kuvvet Serisi Metodu Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık.....	34
4.2. Kuvvet Serisi Metodu Anlamında Equi-İstatistiksel Yakınsaklık.....	37
4.2.1. Kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi.....	40
4.3. P_p -Equi İstatistiksel Yakınsama Oranı.....	43
4.4. Voronovskaya Tipi Yaklaşım Teoremi	46
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR.....	50
ÖZGEÇMİŞ.....	53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$ A $	: A kümesinin eleman sayısı
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
c	: Yakınsak diziler uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
S_θ	: Lacunary istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$C(X)$	: X üzerinde tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı
$B(X)$	: X üzerinde tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _{C(X)}$	: $C(X)$ uzayının alışılmış supremum normu
$D(T)$	: T operatörünün tanım kümesi
$R(T)$	: T operatörünün değer kümesi
$\mathcal{X}_K$	: K kümesinin karakteristik fonksiyonu
$ \sigma_1 $	: Kuvvetli Cesàro toplanabilir diziler uzayı
$\llbracket x \rrbracket$	: x sayısının tam değer fonksiyonu
S_λ	: λ -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\omega(f, \delta)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü
S_e	: Equi-istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı
S_e^λ	: λ -equi istatistiksel yakınsak fonksiyon dizilerinin uzayı
l_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı
δ_{P_p}	: Kuvvet serisi yöntemi anlamında yoğunluk fonksiyonu

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, 1951 yılında Fast ve Steinhaus tarafından reel sayı dizileri için tanımlanarak, klasik yakınsaklık kavramının önemli bir genellemesi olarak matematik literatürüne kazandırılmıştır. Bu kavram, Toplanabilme Teorisi (Schoenberg, 1959; Fridy, 1985), Fonksiyonel Analiz (Connor, 1988, 1989; Demirci ve Orhan, 1999) ve Ölçü Teorisi (Miller, 1995; Miller ve Orhan, 2001) gibi pek çok alanda geniş uygulama alanı bulmuş, özellikle Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından Korovkin tipi yaklaşım teoremlerine uyarlanarak yeni ve güçlü sonuçların elde edilmesine olanak sağlamıştır. Korovkin (1960) tarafından ortaya konan klasik yaklaşım teoremi, Gadjiev ve Orhan'ın istatistiksel yakınsaklık yardımıyla yaptığı genellemeler sayesinde fonksiyon dizilerinin yaklaşım gücü anlamında farklı uzaylara uygulanabilir hale gelmiştir.

İstatistiksel düzgün yakınsaklık ve istatistiksel noktasal yakınsaklık kavramları, Duman ve Orhan (2004) tarafından fonksiyon dizileri üzerinde detaylı biçimde incelenmiştir. Ayrıca, Balcerzak, Dems ve Komisarski (2007) tarafından tanımlanan equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı, alışılmış düzgün yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha güçlü bir yakınsama biçimi olarak ön plana çıkmış ve Karakuş, Demirci ve Duman (2008) tarafından Korovkin tipi teoremlere uygulanmıştır. 1992 yılında Fridy ve Orhan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmış, daha sonra Aktuğlu ve Gezer (2009) tarafından lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu yeni kavramın Korovkin tipi teoremler için güçlü sonuçlar verdiği ispat edilmiştir.

Öte yandan, Mursaleen (2000) tarafından verilen λ - istatistiksel yakınsaklık kavramı, Srivastava, Mursaleen ve Khan (2012) tarafından fonksiyon dizileri için λ - equi istatistiksel yakınsaklık kavramına genişletilmiştir. Yine Srivastava ve arkadaşları, λ -equi istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremlerini genelleterek, bu kavramın güçlü yapısını ortaya koymuşlardır.

Son yıllarda, istatistiksel yakınsaklık kuvvet serisi yöntemi ile birlikte ele alınmaya başlanmıştır. Kuvvet serisi yöntemi, aynı zamanda Abel ve Borel gibi klasik toplanabilme yöntemlerini de kapsayan bir yapıya sahiptir. Ünver ve Orhan (2019), bu yöntemi kullanarak istatistiksel yakınsaklık üzerine yeni bir yaklaşım geliştirmişler ve istatistiksel yakınsaklık ile karşılaştırılamayan kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır.

Bu tez çalışmasında öncelikle kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel noktasal yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık ve equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacak, ardından kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kavramının diğer iki yakınsaklık kavramı arasında kaldığı gösterilecektir. Ayrıca kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Korovkin tipi teorem verilecek ve daha güçlü sonuçlar elde edildiği örneklerle gösterilecektir. Daha sonra süreklilik modülü kullanılarak pozitif lineer operatörlerin dizisi için kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsama oranı verilecektir. Son olarak verilen pozitif lineer operatörlerin bir dizisi için bu kavram yardımı ile Voronovskaya tipi sonuç elde edilecektir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan genel bilgiler yer alacaktır.

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A ve $A_n = \{k \leq n: k \in A\}$ olsun. Ayrıca A_n kümesinin eleman sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.1.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n}$$

limiti varsa, bu limit değerine A kümesinin yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Yoğunluk tanımı için bir başka karakterizasyon şu şekilde verilmiştir.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $A = \{a_n: n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(A)$ mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n}$$

şeklinde olur (Niven ve Zuckerman, 1980).

Şimdi yukarıda ifade edilen yoğunluk tanımlarından yararlanılarak bazı kümelerin yoğunlukları incelenecektir.

2.1.2. Örnek: $A_n = \{k \leq n: k = 2m, m \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere, A kümesinin yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: k = 2m, m \in \mathbb{N}\}|}{n}$$

şeklindedir. Bu takdirde,

$$\frac{|A_n|}{n} = \begin{cases} \frac{n-1}{2n}, & n \text{ tek ise,} \\ \frac{n}{2n}, & n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

olup, buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Böylece $\delta(A) = \frac{1}{2}$ olur.

O halde benzer şekilde $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{2n + 1: n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$, $\delta(\{n^2: n \in \mathbb{N}\}) = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ek olarak asal sayılar kümesinin ve doğal sayıların her bir sonlu alt kümesinin de sıfır yoğunluklu olduğu söylenebilir. Ayrıca bir A kümesi yoğunluğa sahip ise $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ olup, $\delta(\emptyset) = 0$ ve $A \subseteq B$ ise $\delta(A) \leq \delta(B)$ sağlanır (Niven Zuckerman, 1980; Freedman ve Sember, 1981).

2.1.3. Tanım: $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi bu L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ ile gösterilir (Fast, 1951; Steinhaus, 1951).

Tanım göz önünde bulundurularak bir x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunurken bu komşuluğun dışında da indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşulu ile yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabileceği görülür. Ayrıca detayları aşağıdaki teoremden görüleceği gibi yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Böylece istatistiksel yakınsaklığın alışılmış anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğu görülür.

2.1.4. Teorem: Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına yakınsak olsun. O halde yakınsaklık tanım gereğince $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall k \geq n_0$ olduğunda $|x_k - L| < \varepsilon$ olur. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = 0$$

olup buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n} = 0$$

elde edilir.

O halde yakınsak diziler uzayı c ve istatistiksel yakınsak diziler uzayı da S ile gösterilirse 2.1.4. Teorem gereğince $c \subset S$ olduğu görülür. Fakat bu teoremin karşıtı her zaman doğru olmak zorunda değildir. Bu aşağıdaki örnek ile görülmektedir.

2.1.5. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} k + 2, & k = m^2, \\ 0, & k \neq m^2, \end{cases} \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

olacak şekilde tanımlanırsa $x_k = (3, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 11, 0, \dots)$ olacağından $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |x_k - 0| \geq \varepsilon\}|}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: x_k = k + 2\}|}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: k = m^2, m \in \mathbb{N}\}|}{n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 \end{aligned}$$

olup böylece $st - \lim x = 0$ elde edilir. Fakat görülüyor ki $x = (x_k)$ dizisinin alt dizilerinin biri ıraksak diğeri de sifıra yakınsaktır. Bu durumda dizi alışılmış anlamda yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı için sıklıkla kullanılacak olan bir karakterizasyon aşağıda verilmiştir.

2.1.6. Teorem: $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k: k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_k x_{n_k} = L$ olacak şekilde $\exists (x_{n_k})$ alt dizisinin var olmasıdır (Salat, 1980; Fridy, 1985; Connor, 1989).

2.1.7. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \\ 0, & k \neq m^2, \end{cases} \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

şeklinde tanımlansın. Doğal sayıların bir alt kümesi olan tam karelerin kümesi sıfır yoğunluğa sahip olduğundan bu kümenin tümleyeni 1 yoğunluğa sahiptir. Aynı zamanda dizi 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde 0 sayısına alışılmış anlamda yakınsak olduğundan 2.1.6. Teorem gereğince, $st - \lim x = 0$ olur.

Ayrıca 2.1.5. Örnek'te verilen dizi sınırsız ıraksak ve 2.1.7. Örnek'te verilen dizi sınırlı ıraksak olmalarına rağmen istatistiksel yakınsaktır. Bu durum bize gösteriyor ki yakınsak

her dizi sınırlı olmasına rağmen istatistiksel yakınsak her dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Alışılmış anlamda yakınsak iki dizinin toplamının ve bir skaler ile çarpımının yakınsak olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki teoremlerle istatistiksel yakınsak diziler için de bu özelliklerin sağlandığı görülebilir.

2.1.8. Teorem: $st - \lim x = L_1$ ve $st - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i) $st - \lim (x + y) = L_1 + L_2,$

(ii) $st - \lim (\alpha x) = \alpha L_1,$

olur (Fast, 1951).

2.2. Equi-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde fonksiyon dizileri için istatistiksel noktasal yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık ve equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. Bu kavramlar verilmeden önce üzerinde çalışılacak olan fonksiyon uzayları hatırlatılacaktır.

$C[a, b]$, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanan ve aralığın tüm noktalarında sürekli olan fonksiyonların uzayıdır. $f \in C[a, b]$ için

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan alışılmış supremum normu ile $C[a, b]$ bir Banach uzayıdır.

$X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $B(X)$, X üzerinde tanımlı tüm sınırlı fonksiyonların uzayıdır. Bu uzay üzerindeki alışılmış supremum normu

$$\|f\|_{B(X)} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

şeklinde dir. Yine bu norma göre $B(X)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Reel sayıların bir X alt kümesi üzerinde tanımlı fonksiyon dizilerinin istatistiksel noktasal ve istatistiksel düzgün yakınsaklığı Duman ve Orhan tarafından 2004 yılında incelenmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

X , reel sayıların kompakt bir alt kümesi olmak üzere $f \in C(X)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in C(X)$ olsun.

2.2.1. Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\delta(\{n: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa bu durumda (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \rightarrow f$ (ist.) ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

2.2.2. Tanım: Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C(X)} = 0$$

ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

2.2.3. Tanım: Her $\varepsilon > 0, x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_n(x, \varepsilon) := \{k \leq n: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde gösterilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Omega_n(x, \varepsilon)}{n} = 0, (x \in X \text{ e göre düzgün})$$

yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Omega_n(\cdot, \varepsilon)\|_{C(X)}}{n} = 0$$

ise (f_n) , X üzerinde f fonksiyonuna equi-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \rightrightarrows f$ (equi-ist.) ile gösterilir (Balcerzak vd., 2007).

Tanımlar göz önünde bulundurularak $C(X)$ uzayı üzerinde alışılmış düzgün yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık, istatistiksel noktasal yakınsaklık ve equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları arasındaki bağıntı aşağıdaki sonuç ile verilir.

2.2.4. Lemma: X üzerinde, $f_n \rightrightarrows f$ ise $f_n \rightrightarrows f$ (ist.), $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) ise $f_n \rightrightarrows f$ (equi-ist.) ve $f_n \rightrightarrows f$ (equi-ist.) ise $f_n \rightarrow f$ (ist.) olur (Balcerzak vd., 2007; Orhan, 2011).

İspat: X üzerinde, $f_n \rightrightarrows f$ olsun. Bu durumda tanımı gereğince,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C(X)} = 0$$

yazılır. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ olduğunda,

$$\|f_n - f\|_{C(X)} < \varepsilon$$

olur. Böylece

$$\Phi_n(\varepsilon) := \left\{ k \leq n: \|f_k - f\|_{C(X)} \geq \varepsilon \right\}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Phi_n(\varepsilon)|}{n} = 0$$

olup,

$$f_n \rightrightarrows f \text{ (ist.)}$$

elde edilir.

Şimdi de X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) olsun. Tanım gereğince $\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için

$$\frac{|\Phi_n(\varepsilon)|}{n} < \varepsilon'$$

yazılır. Diğer yandan $\forall x \in X$ için,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| = \|f_k - f\|_{C(X)}$$

yazılacağından her $x \in X$ için,

$$|\{k \leq n: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \leq \left| \left\{ k \leq n: \sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki yanını $\frac{1}{n}$ ile çarpılıp limit alınırsa $\forall x \in X$ için,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|}{n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \{k \leq n: \sup_{x \in X} |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \right|}{n} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = 0 \end{aligned}$$

olacağından

$$f_n \rightarrow f \text{ (equi-ist.)}$$

elde edilir.

Verilen bu lemmanın karşınının her zaman doğru olmadığına dair bir örnek aşağıdaki şekilde verilebilir.

2.2.5. Örnek: Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in [0,1]$ ve $g(x) = 0$ olmak üzere $g_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları,

$$g_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1} \left(x - \frac{1}{2^n} \right), & x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right], \\ -2^{n+1} \left(x - \frac{1}{2^{n-1}} \right), & x \in \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}} \right], \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\forall x \in [0,1]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} \frac{|\{k \leq n: |g_k(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

olup,

$$g_n \rightarrow g = 0 \text{ (equi- ist.)}$$

olur. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için, $b_n = \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x) - g(x)| = 1$ olup (b_n) dizisi alışılmış anlamda ve istatistiksel anlamda sıfıra yakınsak olmadığından $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi istatistiksel düzgün yakınsak ve alışılmış anlamda düzgün yakınsak değildir.

2.3. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak literatürde oldukça önemli bir yeri olan Korovkin tipi teoremin genelleştirilmesi elde edilmiştir. Bu bölümde ilk olarak bu teorem verilecek ardından Balcerzak, Dems ve Komisarski (2007) tarafından tanımlanan equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile Korovkin tipi teorem verilecektir. Bu teoremler verilmeden önce operatör kavramı ve temel özellikleri hatırlatılsın.

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsunlar. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir ve yalnız bir g fonksiyonunu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir. Bu da $g(x) = L(f; x)$ ile gösterilir. Burada X uzayına L operatörünün tanım kümesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Böylece $g(x) = L(f; x)$, Y uzayının bir elemanı olur ki, g fonksiyonlarının kümesine de L operatörünün değer kümesi denir. Bu küme $R(L)$ ile gösterilir ve $R(L) \subset Y$ olur. X uzayı lineer bir uzay olduğunda lineer operatörün tanımı verilebilir. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$, X uzayında herhangi iki fonksiyon ve a_1 ve a_2 keyfi iki reel sayı olmak üzere L operatörü,

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2; x) = a_1 L(f_1; x) + a_2 L(f_2; x)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa o takdirde L operatörüne lineer operatör denir. Bu tanımdan açıkça görülüyor ki $L(0; x) = 0$ sağlanır. Lineer operatörler kümesi içerisinde çok önemli bir sınıf vardır ki o da pozitif operatörlerdir. Kabul edelim ki,

$$X^+ = \{ f \in X : f(x) \geq 0 \}$$

$$Y^+ = \{ g \in Y : g(x) \geq 0 \}$$

şeklinde tanımlansınlar. Bu durumda X uzayında tanımlanmış L lineer operatörü, X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa L operatörüne pozitif lineer operatör denir. O halde $f \in C[0,1]$ olmak üzere,

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlı Bernstein polinomu pozitif lineer bir operatördür.

2.3.1. Teorem: Eğer, $L_n: C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1) - 1\|_{B[a,b]} = 0,$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t) - x\|_{B[a,b]} = 0,$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2) - x^2\|_{B[a,b]} = 0,$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C[a, b]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{B[a,b]} = 0$$

olur (Korovkin, 1953, 1960).

İstatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak yukarıda verilen klasik Korovkin teoremi Gadjiev ve Orhan tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

2.3.2. Teorem: Eğer, $L_n: C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

- (i) $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1) - 1\|_{B[a,b]} = 0,$
- (ii) $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t) - x\|_{B[a,b]} = 0,$
- (iii) $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2) - x^2\|_{B[a,b]} = 0$

koşullarını sağlıyor ise her $f \in C[a, b]$ için,

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_{B[a,b]} = 0$$

olur (Gadjiev ve Orhan, 2002).

İstatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile verilen Korovkin teoremi ise Karakuş, Demirci ve Duman (2008) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tez boyunca X , reel sayıların kompakt bir alt kümesi olarak göz önüne alınacaktır.

2.3.3. Teorem: $L_n: C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $e_i(x) = x^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$L_n(e_i) \rightarrow e_i \text{ (equi-ist.)} \quad (2.3.2)$$

ise her $f \in C(X)$ için X üzerinde

$$L_n(f) \rightarrow f \text{ (equi-ist.)} \quad (2.3.3)$$

olur (Karakuş vd., 2008).

İspat: (2.3.2) koşulunun sağlandığını varsayalım. $f \in C(X)$ ve $x \in X$ sabit olsun. f fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $\exists \delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|y - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $y \in X$ ler için $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ yazılır. Diğer yandan,

$$\chi_A(j) = \begin{cases} 1, & j \in A, \\ 0, & j \notin A, \end{cases}$$

ile tanımlı karakteristik fonksiyonu göz önüne alınırsa $X_\delta = [x - \delta, x + \delta] \cap X$ olmak üzere

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x)|\chi_{X_\delta}(y) + |f(y) - f(x)|\chi_{X/X_\delta}(y)$$

yazılır. Böylece her $y \in X$ için

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M \cdot (y - x)^2}{\delta^2} \quad (2.3.4)$$

olur. Burada $M := \|f\|_{C(X)}$ şeklinde tanımlıdır. Şimdi L_n operatörlerinin lineerliği ve pozitifliği göz önüne alınır ve (2.3.4) eşitsizliği kullanılırsa,

$$|L_n(f; x) - f(x)| = |L_n(f(y); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)|$$

$$\begin{aligned}
&= |L_n(f(y) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)| \\
&\leq |L_n(f(y) - f(x)); x| + |f(x)||L_n(1; x) - 1| \\
&\leq (L_n(|f(y) - f(x)|; x) + |f(x)||L_n(1; x) - 1| \\
&\leq L_n\left(\varepsilon + 2M \frac{(y-x)^2}{\delta^2}; x\right) + \|f\|_{C(X)} |L_n(1; x) - 1| \\
&\leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((y-x)^2; x) + M |L_n(1; x) - 1| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon |L_n(1; x) - 1| + M |L_n(1; x) - 1| \\
&\quad + \frac{2M}{\delta^2} \{L_n(y^2; x) - 2xL_n(y; x) + x^2L_n(1; x)\} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \{|L_n(e_2; x) - e_2(x)| + 2|x||L_n(e_1; x) - e_1(x)| \\
&\quad + x^2|L_n(e_0; x) - e_0(x)|\} + (M + \varepsilon) |L_n(e_0; x) - e_0(x)| \\
&= \varepsilon + \left(M + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} x^2\right) |L_n(e_0; x) - e_0(x)| \\
&\quad + \frac{4M}{\delta^2} |x| |L_n(e_1; x) - e_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2} |L_n(e_2; x) - e_2(x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $K := \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} (\|e_2\|_{C(X)} + 2\|e_1\|_{C(X)} + 1)$ olmak üzere

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + K \sum_{i=0}^2 |L_n(e_i; x) - e_i(x)| \quad (2.3.5)$$

olur. Şimdi belirli bir $r' > 0$ için $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $\varepsilon < r'$ olsun. Ayrıca,

$$\Omega_n(x, r') := |\{k \leq n: |L_k(f; x) - f(x)| \geq r'\}|,$$

$$\Omega_{0,n}(x, r') := \left| \left\{ k \leq n: |L_k(e_0; x) - e_0(x)| \geq \frac{r' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|,$$

$$\Omega_{1,n}(x, r') := \left| \left\{ k \leq n: |L_k(e_1; x) - e_1(x)| \geq \frac{r' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|,$$

$$\Omega_{2,n}(x, r') := \left| \left\{ k \leq n: |L_k(e_2; x) - e_2(x)| \geq \frac{r' - \varepsilon}{3K} \right\} \right|$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda (2.3.5) eşitsizliğinden,

$$\Omega_n(x, r') \leq \sum_{i=0}^2 (\Omega_{i,n}(x, r'))$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{\|\Omega_n(\cdot, r')\|_{C(X)}}{n} \leq \sum_{i=0}^2 \left(\frac{\|\Omega_{i,n}(\cdot, r')\|_{C(X)}}{n} \right)$$

olur. Böylece (2.3.2) hipotezden $i = 0, 1, 2$ için $L_n(e_i) \rightarrow e_i$ (equi-ist.) olduğundan her $r' > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Omega_n(\cdot, r')\|_{C(X)}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu ise X üzerinde,

$$L_n(f) \rightarrow f(\text{equi-ist.})$$

demektir. Böylece (2.3.3) sağlanır.

$[0, 1]$ üzerinde (2.3.1) ile tanımlı Bernstein polinomlar dizisi için

$$B_n(1; x) = 1,$$

$$B_n(t; x) = x,$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olup dolayısıyla klasik Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlar. Yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsak olduğundan istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını da sağlar. Şimdi, Bernstein polinomu için elde edilen bu sonuçları göz önüne alarak equi istatistiksel yakınsaklık yardımı ile tanımlı Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlayan fakat klasik ve istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamayan bir örnek verilsin.

2.3.4. Örnek: $X = [0, 1]$ olsun ve $C[0, 1]$ üzerinde (2.3.1) ile tanımlı Bernstein polinomları göz önüne alınsın. Bu polinomları ve 2.2.5. Örnek'te tanımlanan $g_n(x)$ fonksiyon dizisini kullanarak $x \in [0, 1]$ ve $f \in C[0, 1]$ için

$$D_n(f; x) = (1 + g_n(x)) \cdot B_n(f; x)$$

şeklinde tanımlı pozitif lineer operatör tanımlansın. O halde,

$$D_n(e_0; x) = (1 + g_n(x))e_0(x),$$

$$D_n(e_1; x) = (1 + g_n(x))e_1(x),$$

$$D_n(e_2; x) = (1 + g_n(x)) \left\{ e_2(x) + \frac{x \cdot (1 - x)}{n} \right\}$$

şeklinde elde edilir. 2.2.5. Örnek'ten $[0,1]$ üzerinde $g_n \rightarrow g = 0$ (equi-ist.) olduğundan $[0,1]$ üzerinde,

$$D_n(e_i) \rightarrow e_i \text{ (equi-ist.) } (i = 0,1,2)$$

olduğu elde edilir. Bu durumda 2.3.3. Teorem'den $\forall f \in C[0,1]$ için,

$$D_n(f) \rightarrow f \text{ (equi-ist.)}$$

görüldür. Ancak (g_n) , $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığı için (D_n) pozitif lineer operatörler dizisi 2.3.2. Teorem ile verilen istatistiksel Korovkin tipi teoremi sağlamaz. Bunun yanı sıra (g_n) , $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna alışılmış anlamda düzgün yakınsak olmadığı için 2.3.1. Teorem ile verilen klasik Korovkin tipi teoremi de sağlamaz. Bu nedenle equi-istatistiksel Korovkin tipi sonuçların, klasik ve istatistiksel Korovkin tipi durumların önemsiz olmayan bir genellemesi olduğu açıkça görülmektedir.

Şimdi de $D_n(f; x) = (1 + g_n(x)) \cdot B_n(f; x)$ ile tanımlı pozitif lineer operatörlerin equi-istatistiksel yakınsaklık anlamında bir Voronovskaya tipi özelliği sağladığı gösterilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

2.3.5. Lemma: $x \in [0,1]$ ve $\gamma(y) := y - x$ olmak üzere $[0,1]$ üzerinde,

$$n^2 D_n(\gamma^4; x) \rightarrow 3e_2(e_2 - 2e_1 + e_0) \text{ (equi-ist.)}$$

olur (Karakuş vd., 2008).

İspat: D_n pozitif lineer operatörler dizisinin tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} D_n((y - x)^4; x) &= D_n(y^4 - 4y^3x + 6y^2x^2 - 4yx^3 + x^4; x) \\ &= (1 + g_n(x)) \{ B_n(y^4; x) - 4xB_n(y^3; x) + 6x^2B_n(y^2; x) \\ &\quad - 4x^3B_n(y; x) + x^4B_n(1; x) \} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

yazılır. Diğer yandan Bernstein polinomunun tanımı göz önüne alınarak bazı hesaplamalar yapılırsa,

$$B_n(1; x) = 1,$$

$$B_n(t; x) = x,$$

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{(x - x^2)}{n},$$

$$B_n(t^3; x) = x^3 \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + x^2 \frac{(3n-3)}{n^2} + \frac{x}{n^2},$$

$$B_n(t^4; x) = x^4 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + 6x^3 \frac{(n-1)(n-2)}{n^3} + 7x^2 \frac{(n-1)}{n^3} + \frac{x}{n^3},$$

olduğu görülür. Buradan D_n operatörü için (2.3.6) göz önüne alınarak,

$$n^2 D_n(\gamma^4; x) = (1 + g_n(x)) \left(3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + \frac{-6x^4 + 12x^3 - 7x^2 + x}{n} \right)$$

elde edilir. Böylece $\forall x \in [0,1]$ için,

$$\left| n^2 D_n(\gamma^4; x) - 3e_2(x)(e_2(x) - 2e_1(x) + e_0(x)) \right| \leq 12g_n(x) + 26\frac{(1+g_n(x))}{n} \quad (2.3.7)$$

yazılır. Böylece, $g_n \rightarrow g = 0$ (equi-ist.) olduğundan,

$$12g_n + 26\frac{(1+g_n)}{n} \rightarrow 0 \text{ (equi-ist.)} \quad (2.3.8)$$

olduğu görülür. O halde (2.3.7) ve (2.3.8) den dolayı,

$$n^2 D_n(\gamma^4; x) \rightarrow 3e_2(e_2 - 2e_1 + e_0) \text{ (equi-ist.)}$$

olduğu kolayca görülür.

Şimdi tanımlanan D_n operatörleri için elde edilen Voronovskaya- tipi sonuç verilecektir.

2.3.6. Teorem: Her $f \in C[0,1]$ öyle ki $f', f'' \in C[0,1]$ için $[0,1]$ üzerinde,

$$n(D_n f - f) \rightarrow \frac{e_1 - e_2}{2} f'' \text{ (equi-ist.)}$$

olur (Karakuş vd., 2008).

İspat: $f, f', f'' \in C[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olsun.

$$\tilde{\zeta}_x(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(x) - (y-x)f'(x) - \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x)}{(y-x)^2} & , \quad y \neq x \text{ ise,} \\ 0 & , \quad y = x \text{ ise,} \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın. Böylece $\tilde{\zeta}_x$ fonksiyonunun tanımından $\tilde{\zeta}_x(x) = 0$ ve $\tilde{\zeta}_x \in C[0,1]$

olduğu kolayca görülür. O halde Taylor açılımı kullanılarak

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}f''(x) + (y-x)^2\tilde{\zeta}_x(y)$$

elde edilir. Şimdi D_n operatörleri eşitliğin her iki tarafına uygulanırsa, $\gamma(y) := y - x$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_n(f; x) - f(x) &= D_n\left(f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{(y-x)^2}{2}f''(x) + (y-x)^2\tilde{\zeta}_x(y); x\right) \\ &\quad - f(x) \\ &= f(x)D_n(1; x) + f'(x)D_n((y-x); x) + \frac{f''(x)}{2}D_n((y-x)^2; x) \\ &\quad + D_n((y-x)^2\tilde{\zeta}_x(y); x) - f(x) \\ &= f(x)g_n(x) + f'(x)D_n(\gamma; x) + \frac{f''(x)}{2}D_n(\gamma^2; x) + D_n(\gamma^2\tilde{\zeta}_x; x) \\ &= f(x)g_n(x) + \frac{x(1-x)f''(x)}{2n}(1 + g_n(x)) + D_n(\gamma^2\tilde{\zeta}_x; x) \end{aligned}$$

olup buradan $M = \|f\|_{C[0,1]} + \|f''\|_{C[0,1]}$ olmak üzere

$$\left| n(D_n(f; x) - f(x)) - \frac{e_1(x) - e_2(x)}{2}f''(x) \right| \leq M(n+1)g_n(x) + n|D_n(\gamma^2\tilde{\zeta}_x; x)| \quad (2.3.9)$$

elde edilir. Şimdi (2.3.9) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terime Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$n|D_n(\gamma^2\tilde{\zeta}_x; x)| \leq (n^2D_n(\gamma^4; x))^{\frac{1}{2}}(D_n(\tilde{\zeta}_x^2; x))^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.10)$$

elde edilir. Buradan $\rho_x(y) := \tilde{\zeta}_x^2(y)$ olarak tanımlanırsa $\rho_x(x) = 0$ ve $\rho_x(\cdot) \in C[0,1]$ elde edilir. O halde 2.3.3. Teorem'den $[0,1]$ üzerinde

$$D_n(\rho_x) \rightarrow 0 \text{ (equi-ist.)} \quad (2.3.11)$$

olur. (2.3.10) ve (2.3.11) göz önünde bulundurulur ve ayrıca 2.3.5. Lemma kullanılırsa $[0,1]$ üzerinde,

$$n(D_n(\gamma^2\tilde{\zeta}_x; x)) \rightarrow 0 \text{ (equi-ist.)} \quad (2.3.12)$$

olduğu görülür. Böylelikle $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\Omega_n(x, \varepsilon) := \left\{ k \leq n : \left| k(D_k(f; x) - f(x)) - \frac{e_1(x) - e_2(x)}{2}f''(x) \right| \geq \varepsilon \right\},$$

$$\Omega_{1,n}(x, \varepsilon) := \left| \left\{ k \leq n: \left| (k+1)g_k(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2M} \right\} \right|,$$

$$\Omega_{2,n}(x, \varepsilon) := \left| \left\{ k \leq n: \left| kD_k(\gamma^2 \tilde{\zeta}_x; x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|,$$

olacak şekilde kümeler belirlensin. Burada (2.3.9) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{\Omega_n(x, \varepsilon)}{n} \leq \frac{\Omega_{1,n}(x, \varepsilon)}{n} + \frac{\Omega_{2,n}(x, \varepsilon)}{n}$$

olup böylece,

$$\frac{\|\Omega_n(\cdot, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{n} \leq \frac{\|\Omega_{1,n}(\cdot, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{n} + \frac{\|\Omega_{2,n}(\cdot, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{n} \quad (2.3.13)$$

elde edilir. Ayrıca (g_n) fonksiyon dizisinin tanımı gereğince $[0,1]$ üzerinde,

$$(n+1)(g_n) \rightarrow 0 \text{ (equi-ist.)} \quad (2.3.14)$$

elde edilir. Şimdi (2.3.12) ve (2.3.14) sonuçları kullanılarak (2.3.13) eşitsizliğinin her iki tarafından $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\Omega_n(\cdot, \varepsilon)\|_{C[0,1]}}{n} = 0$$

elde edilir ve istenen gösterilmiş olur.

2.4. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde $\{k_r\}$ lacunary dizisi için $\{k \in \mathbb{N}: k \leq n\}$ yerine $\{k \in \mathbb{N}: k_{r-1} < k \leq k_r\}$ kümesi alınarak elde edilen bir yakınsamanın tanımı verilecektir. Ayrıca istatistiksel yakınsaklık ile olan ilişkisi incelenecektir.

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r := k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizi denir (Freedman vd., 1978).

Buna göre $\theta = \{k_r\} = (2^r - 1)$ ($r \geq 0$) bir lacunary dizi olduğu görülür.

Bu bölümde θ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecek olup $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r olarak kısaltılacaktır.

2.4.1. Tanım: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r: \left| x_k - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durumda $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ile gösterilir (Fridy ve Orhan, 1992).

Şimdi de N_θ anlamında yakınsaklık tanımlanacak ve N_θ ile S_θ yakınsaklık arasında bazı içerme bağıntıları verilecektir. Ayrıca bunların sınırlı diziler için eşdeğer oldukları gösterilecektir.

2.4.2. Tanım: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına N_θ anlamında yakınsaktır denir ve bu durum $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ şeklinde gösterilir. Böylece,

$$N_\theta := \left\{ x = (x_k) : \lim \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

ile gösterilir (Freedman vd., 1978).

2.4.3. Teorem: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu takdirde

(i) $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ olur.

(ii) l_∞ sınırlı dizilerin uzayı olmak üzere $x \in l_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ise $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ olur.

(iii) $S_\theta \cap l_\infty = N_\theta \cap l_\infty$ olur (Fridy ve Orhan, 1992).

İspat: (i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \\ &= \varepsilon \left| \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| \end{aligned}$$

olduğundan ve

$$\frac{1}{h_r} \varepsilon \left| \{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \right| \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

olduğundan,

$$x_k \rightarrow L(S_\theta)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (i) deki içirme, kesin içirme bağıntısıdır. Herhangi bir $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ele alınsın. Bir (x_k) dizisi de I_r aralığında ilk $\llbracket \sqrt{h_r} \rrbracket$ tam sayılarında, $x_k, 1, 2, \dots, \llbracket \sqrt{h_r} \rrbracket$ ve diğer durumlarda, $x_k = 0$ şeklinde tanımlansın. O halde $x = (x_k)$ dizisi sınırlı değildir. Öte yandan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\llbracket \sqrt{h_r} \rrbracket}{h_r} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$x_k \rightarrow 0(S_\theta)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{\llbracket \sqrt{h_r} \rrbracket \llbracket \sqrt{h_r} + 1 \rrbracket}{2}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \frac{\llbracket \sqrt{h_r} \rrbracket \llbracket \sqrt{h_r} + 1 \rrbracket}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

olur. Böylece,

$$x_k \not\rightarrow 0(N_\theta)$$

elde edilir ve istenen gösterilmiş olur.

(ii) $x \in l_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ olsun. Bu durumda dizi sınırlı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k - L| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. O halde $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde,

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} M + \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} \varepsilon \\ &\leq M |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + h_r \varepsilon \end{aligned}$$

olup,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \leq \frac{1}{h_r} M |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon$$

elde edilir. Bu da,

$$x_k \rightarrow L (N_\theta)$$

demektir.

(iii) (i) ve (ii) den ispat aşıkardır.

Kuvvetli Cesáro toplanabilir dizilerin sınıfı

$$|\sigma_1| := \left\{ x : \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

ile gösterilmek üzere aşağıdaki lemma verilebilir.

2.4.4. Lemma: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu durumda, $S \subseteq S_\theta$ olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1992).

İspat: Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu takdirde yeterince büyük $r > 0$ sayısı için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. O halde kolayca görülür ki, $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$

olduğundan $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$ yazılır. Eğer $x_k \rightarrow L (S)$ ise $\forall \varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

olup buradan istenen elde edilir.

Tersine $\liminf_r q_r = 1$ olsun. Freedman vd. (1978) tarafından gösterildiği gibi $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisi $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere,

$$\frac{k_{r_{j-1}}}{k_{r_j}} > j \quad \text{ve} \quad \frac{k_{r(j-1)}}{k_{r_{j-1}}} < 1 + \frac{1}{j}$$

olacak şekilde seçilsin. Şimdi sınırlı bir $x = (x_i)$ dizisi,

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in I_{r_j}, \quad (j = 1, 2, \dots) \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x \in |\sigma_1|$, fakat $x \notin N_\theta$ olduğu Freedman vd. (1978) tarafından gösterilmiştir. 2.4.3 Teorem (ii) den $x \notin S_\theta$ olur. Ayrıca Connor (1988) tarafından gösterilen, bir dizi bir L sayısına kuvvetli Cesáro toplanabilir ise L sayısına istatistiksel yakınsak olduğu bilgisini kullanarak $x \in S$ elde edilir. Buradan $S \not\subseteq S_\theta$ olup istenen elde edilir.

2.4.5. Lemma: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. O halde, $S_\theta \subseteq S$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1992).

İspat: Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Böylece, $\forall r \in \mathbb{N}$ için $q_r < T$ olacak şekilde $\exists T > 0$ sayısı vardır. $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ve $N_r := |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ olsun. O halde,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacağından $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bir K sayısı $K := \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ olacak şekilde ve ayrıca $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde n sayısı seçilsin. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{n} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots N_r\} \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots N_{r_0}\} + \frac{1}{k_{r-1}} \{N_{r_0+1} + \dots N_r\} \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots N_{r_0}\} + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\ &\leq \frac{Kr_0}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}} \sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &< \frac{Kr_0}{k_{r-1}} + \frac{1}{k_{r-1}} \varepsilon \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &= \frac{Kr_0}{k_{r-1}} + \varepsilon \frac{k_r - k_0}{k_{r-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{Kr_0}{k_{r-1}} + \varepsilon q_r \\ &\leq \frac{Kr_0}{k_{r-1}} + \varepsilon T \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\varepsilon > 0$ keyfi ve $r \rightarrow \infty$ için $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $x_k \rightarrow L(S)$ olur. Böylece $S_\theta \subseteq S$ elde edilir ve istenen gösterilmiş olur.

Tersine $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. Freedman vd. (1978) tarafından gösterildiği gibi $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisinin bir $\{k_{r(j)}\}$ alt dizisi $q_{r_j} > j$ olacak şekilde seçilsin ve bununla birlikte sınırlı bir $x = (x_i)$ dizisi,

$$x_i = \begin{cases} 1, & k_{r_{j-1}} < i \leq 2k_{r_{j-1}}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde Freedman vd. (1978) tarafından izlenen ispat yöntemi kullanılarak $x \in N_\theta$ fakat $x \notin \sigma_1$ olduğu görülür. 2.4.3. Teorem'den $x \in S_\theta$ yazılır. Ancak sınırlı bir dizi istatistiksel yakınsak ise kuvvetli Cesáro toplanabilir olacağından $x \notin S$ dir. Bu durumda $S_\theta \not\subseteq S$ olur. O halde istenen gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır. Böylece 2.4.4. Lemma ve 2.4.5. Lemma kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

2.4.6. Teorem: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu takdirde, $S = S_\theta$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1992).

2.5. Lacunary Equi-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde fonksiyon dizileri için lacunary istatistiksel noktasal yakınsaklık, lacunary istatistiksel düzgün yakınsaklık ve lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacak ve equi-istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki bağıntı incelenecektir.

2.5.1. Tanım: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve her $r \in \mathbb{N}$ için $f_r \in C(X)$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\{m \in I_r : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|}{h_r} = 0$$

ise f_r fonksiyon dizisi, X üzerinde f fonksiyonuna lacunary istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve $f_r \rightarrow f$ (θ -ist.) ile gösterilir (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

2.5.2. Tanım: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve her $r \in \mathbb{N}$ için $f_r \in C(X)$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\{m \in I_r : \|f_m - f\|_{C(X)} \geq \varepsilon\}|}{h_r} = 0$$

ise f_r fonksiyon dizisi, X üzerinde f fonksiyonuna lacunary istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve $f_r \rightrightarrows f$ (θ -ist.) ile gösterilir (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

2.5.3. Tanım: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve her $r \in \mathbb{N}$ için $f_r \in C(X)$ olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için reel değerli fonksiyonların dizisi

$$\gamma_{r,\varepsilon}(x) = \frac{1}{h_r} |\{m \in I_r : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|$$

şeklinde tanımlanmak üzere $(\gamma_{r,\varepsilon})_{r \in \mathbb{N}}$ dizisi sıfıra düzgün yakınsak yani;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\gamma_{r,\varepsilon}(\cdot)\|_{C(X)} = 0$$

ise f_r fonksiyon dizisi, X üzerinde f fonksiyonuna lacunary equi-istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_r \Rightarrow f$ (θ -equi ist.) gösterilir (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

Yukarıdaki tanımların doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı verilebilir.

2.5.4. Lemma: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olmak üzere X üzerinde,

$$f_r \rightrightarrows f(\theta\text{-ist}) \Rightarrow f_r \Rightarrow f(\theta\text{-equi ist.}) \Rightarrow f_r \rightarrow f(\theta\text{-ist.})$$

olur (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

Ancak, aşağıda verilen örnek bu lemmanın tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

2.5.5. Örnek: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. $f_r: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$f_r(x) = \begin{cases} -4r^2(r+1)^2 \left(x - \frac{1}{r}\right) \left(x - \frac{1}{r+1}\right), & x \in \left(\frac{1}{r+1}, \frac{1}{r}\right], \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

O halde $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\gamma_{r,\varepsilon}(x) = \frac{1}{h_r} |\{m \in I_r : |f_m(x)| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r}$$

olacağından $f_r \rightarrow 0$ (θ -equi ist.) olur. Ancak, tüm r ler için $\sup_{x \in [0,1]} |f_r(x)| = 1$ olduğundan

(f_r) sıfıra lacunary istatistiksel düzgün yakınsak değildir. Dolayısıyla, lacunary equi istatistiksel yakınsak bir fonksiyon dizisinin her zaman lacunary istatistiksel düzgün yakınsak olmadığı bu örnekle gösterilmiş olur.

2.5.6. Örnek: $\theta = \{2^k\}$ ($k > 0$) lacunary dizisi ve $f_r: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_r(x) = x^r$ ile tanımlı fonksiyon dizisi göz önüne alınsın. f nin alışılmış anlamda f_r nin noktasal limiti olduğu varsayılınsın. Bu takdirde, $f_r \rightarrow f$ (θ -ist.) fakat $f_r \rightarrow f$ (θ -equi ist.) değildir. Gerçekten de, tüm $N \in \mathbb{N}$ ler için $\varepsilon = \frac{1}{2}$ seçerirse bu takdirde, $\exists r > N$ vardır öyle ki, tüm $m \in [2^{r-1}, 2^r)$

$$\text{ve } x \in \left(2^r \sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right) \text{ için, } |f_m(x)| = |x^m| \geq \left|\left(2^r \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^m\right| \geq \left|\left(2^r \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2^r}\right| = \frac{1}{2}$$

elde edilir ve istenen gösterilmiş olur.

2.4.4. Lemma ve 2.4.5. Lemma ispatlarındaki benzer düşünce ile f_r fonksiyon dizisi düşünüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

2.5.7. Lemma: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun. Bu takdirde, X üzerinde

$$f_r \rightarrow f(\text{equi-ist.})$$

olduğunda,

$$f_r \rightarrow f(\theta\text{-equi ist.})$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$1 < \liminf_r q_r$$

olmasıdır (Aktuğlu, Gezer; 2009).

2.5.8. Lemma : $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olsun ve X üzerinde,

$$f_r \rightarrow f(\theta\text{-equi ist.})$$

olduğunda,

$$f_r \rightarrow f(\text{equi-ist.})$$

olması için gerek ve yeter koşul,

$$\limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır (Aktuğlu ve Gezer; 2009).

2.5.1. Lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi

Bu bölümde 2009 yılında lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Aktuğlu ve Gezer tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

2.5.1.1. Teorem: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $L_r: C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. $e_i(x) = x^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$L_r(e_i, x) \rightarrow e_i(x) (\theta\text{-equi ist.}) \quad (2.5.1.1)$$

ise, her $f \in C(X)$ için

$$L_r(f; x) \rightarrow f (\theta\text{-equi ist.})$$

olur (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

İspat: $f \in C(X)$ olsun. f sürekli olduğundan $x \in X$ sabit bir nokta olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|y - x| < \delta$ koşulunu sağlayan tüm $y \in X$ ler için $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır. Diğer yandan, $K_\delta := \{y \in \mathbb{R}: |y - x| < \delta\}$ olmak üzere $X_\delta := X \cap K_\delta$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f(x)|\chi_{X_\delta}(y) + |f(y) - f(x)|\chi_{X \setminus X_\delta}(y) \\ &\leq \varepsilon + 2M\chi_{X \setminus X_\delta}(y) \end{aligned}$$

yazılır. Burada, $M := \|f\|_{C(X)}$ ile tanımlıdır. O halde bazı basit hesaplamalardan sonra

$$\chi_{X \setminus X_\delta}(y) \leq \frac{1}{\delta^2} (y - x)^2$$

olacağından $\forall y \in X$ için,

$$|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (y - x)^2$$

yazılır. $B := \varepsilon + M + \frac{4M}{\delta^2} (\|e_2\|_{C(X)} + \|e_1\|_{C(X)} + 1)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} |L_r(f; x) - f(x)| &\leq L_r(|f(y) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\leq \varepsilon L_r(e_0; x) + \frac{2M}{\delta^2} \{L_r((y - x)^2; x)\} + M |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\leq \varepsilon + (\varepsilon + M) |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2M}{\delta^2} \{L_r(e_2; x) - 2xL_r(e_1; x) + x^2L_r(e_0; x)\} \\
& \leq \varepsilon + (\varepsilon + M)|L_r(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2M}{\delta^2} |L_r(e_2; x) - e_2(x)| \\
& \quad + \frac{4M}{\delta^2} |x||L_r(e_1; x) - e_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2} x^2 |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \\
& \leq \varepsilon + \left(\varepsilon + M + \frac{2M \|e_2(x)\|_{C(X)}}{\delta^2} \right) |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \\
& \quad + \frac{4M \|e_1(x)\|_{C(X)}}{\delta^2} |L_r(e_1; x) - e_1(x)| + \frac{2M}{\delta^2} |L_r(e_2; x) - e_2(x)|
\end{aligned}$$

olup böylece;

$$|L_r(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + B \sum_{i=0}^2 |L_r(e_i, x) - e_i(x)| \quad (2.5.1.2)$$

elde edilir. Belirli bir $s > 0$ için, $0 < \varepsilon < s$ olacak şekilde seçilsin ve $i = 0, 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$D_s(x) := \{m \in \mathbb{N} : |L_m(f; x) - f(x)| \geq s\},$$

$$D_s^i(x) := \left\{ m \in \mathbb{N} : |L_m(e_i; x) - e_i(x)| \geq \frac{s - \varepsilon}{3B} \right\}.$$

O halde, (2.5.1.2) eşitsizliğinden açıkça

$$D_s(x) \subset \bigcup_{i=0}^2 D_s^i(x) \quad (2.5.1.3)$$

elde edilir. Bunlara ek olarak, reel değerli

$$\gamma_{r,s}(x) := \frac{1}{h_r} |\{m \in I_r : |L_m(f; x) - f(x)| \geq s\}|$$

fonksiyonu göz önüne alınarak, $i = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\gamma_{r,s}^i(x) := \frac{1}{h_r} \left| \left\{ m \in I_r : |L_m(e_i; x) - e_i(x)| \geq \frac{s - \varepsilon}{3B} \right\} \right|$$

kümeleri tanımlansın. Bu takdirde monotonluk ve (2.5.1.3) içermesi ile birlikte

$$\gamma_{r,s}(x) \leq \sum_{i=0}^2 \gamma_{r,s}^i(x)$$

elde edilir. O halde her $x \in X$ için

$$\| \gamma_{r,s}(\cdot) \|_{C(X)} \leq \sum_{i=0}^2 \| \gamma_{r,s}^i(\cdot) \|_{C(X)} \quad (2.5.1.4)$$

elde edilir. Böylece (2.5.1.4) eşitsizliğinde $r \rightarrow \infty$ için limit alınıp (2.5.1.1) hipotezi kullanılırsa,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \| \gamma_{r,s}(\cdot) \|_{C(X)} = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2.5.1.1. Teorem ve 2.5.7. Lemma birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.5.1.2. Sonuç: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi olmak üzere $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu durumda $L_r: C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve $e_i(x) = x^i$ olmak üzere $i = 0,1,2$ için

$$L_r(e_i, x) \rightarrow e_i(x) \text{ (equi-ist.)}$$

ise her $f \in C(X)$ için,

$$L_r(f; x) \rightarrow f \text{ (}\theta\text{-equi ist.)}$$

olur (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

Benzer şekilde, 2.5.1.1. Teorem ve 2.5.8. Lemma birlikte düşünülerek aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.5.1.3. Sonuç: $\theta = \{k_r\}$ bir lacunary dizi ve $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu takdirde $L_r: C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve $e_i(x) = x^i$ olmak üzere $i = 0,1,2$ için

$$L_r(e_i, x) \rightarrow e_i(x) \text{ (}\theta\text{-equi ist.)}$$

ise her $f \in C(X)$ için,

$$L_r(f; x) \rightarrow f \text{ (equi-ist.)}$$

olur (Aktuğlu ve Gezer, 2009).

2.6. λ – İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde Mursaleen (2000) tarafından tanımlanan λ –istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacaktır.

Pozitif tamsayıların azalmayan ve sonsuza giden bir $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi,

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1 \text{ ve } \lambda_1 = 1 \quad (2.6.1)$$

şeklinde olsun. Böylece bu dizilere $\lambda_n = n$, $\lambda_n = \ln(ne)$ ve $\lambda_n = \llbracket \sqrt{n} \rrbracket$ örnek olarak gösterilebilir.

$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere genelleştirilmiş de la Valée-Pousin ortalaması,

$$t_n(x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $t_n(x) \rightarrow L$ ise $x = (x_k)$ dizisine L sayısına (V, λ) -toplanabilir denir. $\lambda_n = n$ olması durumunda (V, λ) -toplanabilirlik literatürde iyi bilinen $(C, 1)$ -toplanabilirliğe dönüşür.

2.6.1. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{j \in I_n : |x_j - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_j)$ dizisi L sayısına λ - istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_\lambda - \lim x = L$ veya $x_j \rightarrow L(S_\lambda)$ ile gösterilir (Mursaleen, 2000).

2.6.2. Örnek: $\lambda_n = \llbracket \sqrt{n} \rrbracket$ olsun. $x = (x_j)$ dizisi

$$x_j = \begin{cases} 0, & j = k^3 \text{ ise,} \\ 1, & j \neq k^3 \text{ ise,} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $I_n = [n - \llbracket \sqrt{n} \rrbracket + 1, n]$ olup her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{j \in I_n : |x_j - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0$$

olacağından $x_j \rightarrow 1(S_\lambda)$ elde edilir.

2.6.3. Sonuç: 2.6.1. Tanım'da $\lambda_n = n$ alınırsa λ -istatistiksel yakınsaklık tanımı istatistiksel yakınsaklık tanımına dönüşür.

2.6.4. Teorem: $x_j \rightarrow L(S)$ olduğunda $x_j \rightarrow L(S_\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul $\liminf_n \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olmasıdır (Mursaleen, 2000).

2.7. λ -Equi İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde Srivastava, Mursaleen ve Khan (2012) tarafından reel terimli fonksiyon dizileri için verilen, λ -istatistiksel noktasal, λ -istatistiksel düzgün ve λ -equi istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır. Daha sonra bu kavramlar arasında ilişki verilip equi-istatistiksel yakınsaklık ile λ -equi istatistiksel yakınsaklık arasındaki kapsama ilişkisi verilecektir. Ayrıca yeni tanıtılan λ -equi istatistiksel yakınsaklık kavramı, bir Korovkin tipi yaklaşım teoremini vermek üzere uygulanacaktır.

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f, f_k \in C(X)$ olsun. Ayrıca

$$S_n(\varepsilon, x) = \frac{1}{\lambda_n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}|$$

olarak tanımlansın.

2.7.1. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisi X üzerinde f fonksiyonuna λ -istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \rightarrow f$ (λ -ist.) ile gösterilir (Srivastava ve ark., 2012).

2.7.2. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } \|f_k - f\|_{C(X)} \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, (f_n) fonksiyon dizisi X üzerinde f fonksiyonuna λ -istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \rightrightarrows f$ (λ -ist.) ile gösterilir (Srivastava vd., 2012).

2.7.3. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için, reel değerli fonksiyonlar dizisi $S_n(\varepsilon, x)$, 0 fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(\varepsilon, x)\|_{C(X)} = 0$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisi X üzerinde f fonksiyonuna λ -equi istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \rightrightarrows f$ (λ -equi ist.) ile gösterilir (Srivastava vd., 2012).

O halde tanımlardan hareketle aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.7.4. Lemma: X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (λ -ist.) ise $f_n \rightrightarrows f$ (λ -equi ist.) ve $f_n \rightrightarrows f$ (λ -equi ist.) ise $f_n \rightarrow f$ (λ -istatistiksel) (Srivastava vd., 2012).

Ancak, genel olarak bu lemmanın karşıtı doğru değildir. Bunu gösteren bir örnek aşağıda verilmiştir.

2.7.5. Örnek: $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan, $n \rightarrow \infty$ için $\lambda_n \rightarrow \infty$ olup (2.6.1) şartlarını sağlayan bir dizi olsun. Ayrıca, $f_k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) fonksiyon dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$f_k(x) = \begin{cases} 2k(k+1)\left(x - \frac{1}{k+1}\right), & x \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{2k+1}{2k(k+1)}\right], \\ -2k(k+1)\left(x - \frac{1}{k}\right), & x \in \left[\frac{2k+1}{2k(k+1)}, \frac{1}{k}\right], \\ 0 & , \quad x \notin \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]. \end{cases}$$

Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } |f_k(x)| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0 \quad (x \text{ e göre düzgün})$$

olduğundan,

$$f_k \rightarrow 0 \quad (\lambda\text{-equi ist.})$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x)| = 1 \quad (r \in \mathbb{N})$$

olduğundan (f_k) fonksiyon dizisi λ –istatistiksel düzgün yakınsak ve alışılmış anlamda düzgün yakınsak değildir.

2.7.6. Örnek: $\lambda_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, $f_k: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f_k(x) = x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) olsun. f_k fonksiyon dizisinin noktasal limitinin f olduğu varsayalım. Bu durumda,

$$f_k \rightarrow f \quad (\lambda\text{-ist.})$$

olur. Ancak,

$$f_k \not\rightarrow f \quad (\lambda\text{-equi ist.})$$

değildir. Gerçektende $\varepsilon = \frac{1}{2}$ seçilsin. $\forall N \in \mathbb{N}$ için $\exists n > N$ vardır öyle ki

$k \in [n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, n]$ olmak üzere $x \in \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}, 1\right)$ olsun. Böylece,

$$|f_k(x)| = |x^k| \geq \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \right)^k \geq \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \right)^n = \frac{1}{2}$$

olup istenen elde edilir.

2.7.7. Lemma: S_e ve S_e^λ , sırasıyla tüm equi istatistiksel yakınsak ve λ -equi istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi olsun. Bu takdirde,

$$S_e \subseteq S_e^\lambda \Leftrightarrow \liminf_n \frac{\lambda_n}{n} > 0$$

olmasıdır (Srivastava vd., 2012).

İspat: (f_k) fonksiyon dizisi equi-istatistiksel yakınsak ve $\liminf_n \frac{\lambda_n}{n} > 0$ olsun. Böylece her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (x \text{ e göre düzgün})$$

olur. Ayrıca,

$$\{k \leq n: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \supset \{k: k \in I_n \text{ ve } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_n \frac{\lambda_n}{n} > 0$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k: k \in I_n \text{ ve } \|f_k - f\|_{C(X)} \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (x \text{ e göre düzgün})$$

elde edilir. Bu da (f_k) dizisinin f fonksiyonuna λ -equi istatistiksel yakınsak olduğu anlamına gelir. Böylece,

$$S_e \subseteq S_e^\lambda$$

elde edilir.

Şimdi de,

$$\liminf_n \frac{\lambda_n}{n} = 0$$

olduğu varsayalım. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ ve sonsuz çoklukta n için,

$$\frac{\lambda_n}{n} < \varepsilon$$

olur. $\varepsilon = \frac{1}{j}$ ($j \in \mathbb{N}$) olsun. Her $j \in \mathbb{N}$ için öyle bir $n(j)$ seçebiliriz ki,

$$\frac{\lambda_{n(j)}}{n(j)} \leq \frac{1}{j}$$

yazılır. Bu alt dizi oluşturulduktan sonra $f_i(x)$ dizisi,

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & i \in I_{n(j)} \ (j \in \mathbb{N}) \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f_i \rightarrow 0$ (equi-ist.) elde edilir. Ancak

$$\frac{1}{\lambda_{n(j)}} |\{k: k \in I_{n(j)} \text{ ve } f_i(x) = 1\}| = 1$$

olup (f_i) fonksiyon dizisi sıfıra λ -equi istatistiksel yakınsak değildir. Bu da $x \notin S_e^\lambda$ olduğunu gösterir.

Srivastava, Mursaleen ve Khan (2012), λ -equi istatistiksel yakınsaklığın bir uygulaması olarak aşağıdaki Korovkin tipi teoremi elde etmişlerdir.

2.7.8. Teorem: $L_r: C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $e_i(x) = x^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$L_r(e_i) \rightarrow e_i \ (\lambda\text{-equi ist.})$$

ise her $f \in C(X)$ için,

$$L_r(f) \rightarrow f \ (\lambda\text{-equi ist.})$$

olur (Srivastava vd., 2012).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışması, equi-istatistiksel yakınsaklık kavramını çeşitli yakınsaklık türleri yardımı ile tanıtarak, bu yakınsaklık türlerinin Korovkin tipi yaklaşım teoremlerine olan etkilerini sistematik olarak incelemeyi amaçlamaktadır. Bu kapsamda ilk olarak Steinhaus (1951) ve Fast (1951) tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı temel alınmış, Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından geliştirilen istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi esas alınarak tezin teorik çerçevesi yapılandırılmıştır.

Çalışmada kullanılan yöntemsel yaklaşım, Balcerzak, Dems ve Komisarski (2007) tarafından ortaya konan equi-istatistiksel yakınsaklık kavramını esas almakta ve Karakuş, Demirci ve Duman (2008) tarafından geliştirilen equi-istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoreminin dayandığı hipotezler üzerinden ilerlemektedir. Aynı zamanda Fridy ve Orhan (1992) tarafından geliştirilen lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı, Aktuğlu ve Gezer (2009) tarafından tanımlanan lacunary equi-istatistiksel yakınsaklık perspektifinden genişletilerek ele alınmış, bu kavramlar yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremleri elde edilmiştir.

Buna ek olarak, Mursaleen (2000) tarafından geliştirilen λ -istatistiksel yakınsaklık kavramı, Srivastava, Mursaleen ve Khan (2012) tarafından tanımlanan λ -equi istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla fonksiyon dizileri bağlamında yeniden yorumlanmıştır. Son olarak Abel ve Borel gibi iyi bilinen toplanabilme metodlarını içeren kuvvet serisi metodu tanımlanmış ve kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramı ise Ünver ve Orhan (2019) tarafından verilen tanım çerçevesinde ele alınmış, Demirci, Dirik ve Yıldız (2022) tarafından geliştirilen kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımıyla Korovkin tipi teorem ve bir Voronovskaya tipi teorem ispat edilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. Kuvvet Serisi Metodu Anlamında İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde bir dizinin kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklığı tanıtılacak ve istatistiksel yakınsaklık ile karşılaştırılamayacağı gösterilecektir.

4.1.1. Tanım: (p_r) negatif olmayan reel terimli $p_0 > 0$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun.

$$p(t) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r t^r$$

şeklinde tanımlı kuvvet serisi $R \in (0, \infty]$ olmak üzere R yakınsaklık yarıçapına sahip olsun. Eğer,

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r=0}^{\infty} x_r p_r t^r$$

limiti varsa, $x = (x_r)$ dizisine kuvvet serisi metodu anlamında yakınsaktır denir (Kratz ve Stadtmüller, 1989; Boos, 2000).

Kuvvet serisi metodunun regülerliği aşağıdaki teorem ile karakterize edilmiştir:

4.1.2. Teorem: Kuvvet serisi metodunun regüler olması için $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{p_r t^r}{p(t)} = 0$$

olmasıdır (Boos, 2000).

Kuvvet serisi metodu iyi bilinen Abel ve Borel gibi toplanabilme metodlarını içermektedir.

Eğer $r \in \mathbb{N}_0$ için $p_r = 1$ ve $R = 1$ ise $p(t) = \frac{1}{1-t}$ olup kuvvet serisi metodu Abel metodu ile çakışır.

Eğer $r \in \mathbb{N}_0$ için $p_r = \frac{1}{r!}$ ve $R = \infty$ ise $p(t) = e^t$, $(t \in \mathbb{R})$ olup kuvvet serisi metodu Borel metodu ile çakışmaktadır.

4.1.3. Örnek: $|t| < 1$ ve $\forall r \in \mathbb{N}$ için $p_r = 1$ olsun. Bu durumda,

$$p(t) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r$$

olur. Genel terimi,

$$x = (x_r) = \begin{cases} 0, & r \text{ tek ise,} \\ 2, & r \text{ çift ise,} \end{cases}$$

olacak şekilde (x_r) dizisi tanımlansın. O halde,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r=0}^{\infty} x_r p_r t^r &= \lim_{t \rightarrow 1^-} 2(1-t) \sum_{r=0}^{\infty} t^{2r} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} 2(1-t) \frac{1}{1-t^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $x = (x_r)$ dizisi kuvvet serisi metodu anlamında 1 sayısına yakınsaktır. Fakat, alışılmış anlamda yakınsak değildir.

4.1.4. Örnek: $x = (x_r) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlansın. $r \in \mathbb{N}_0$ için $p_r = \frac{1}{r!}$ ve $R = \infty$ ise $p(t) = e^t$ ile tanımlanan kuvvet serisi metodu göz önüne alınsın.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x_r t^r}{r!} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{2r}}{(2r)!} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

olur. Böylece, alışılmış anlamda yakınsak olmayan $x = (x_r)$ dizisi, kuvvet serisi metodu anlamında yakınsak olur.

Tez boyunca kuvvet serisi metodu regüler kabul edilecektir.

Bir $D \subset \mathbb{N}_0$ kümesi için P_p -yoğunluk kavramı ve reel terimli diziler için kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramı Ünver ve Orhan tarafından 2019 yılında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

4.1.5. Tanım: $D \subset \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in D} p_r t^r$$

limiti varsa bu limit değerine D kümesinin P_p - yoğunluğu denir ve $\delta_{P_p}(D)$ ile gösterilir Burada, $0 \leq \delta_{P_p}(D) \leq 1$ olduğu aşıkardır (Ünver ve Orhan, 2019).

4.1.6. Örnek: $D \subset \mathbb{N}_0$ alt kümesi, $D = \{2r + 1 : r \in \mathbb{N}_0\}$ ve (p_r) dizisi de, $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$p_r = \begin{cases} 1, & r = 2m, \\ 0, & r = 2m + 1, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada, $\delta_{p_p}(D) = 0$ ve $\delta(D) = \frac{1}{2}$ olduğu kolayca görülür. O halde $\mathbb{N}_0$ in bir alt kümesinin yoğunluğu ile P_p -yoğunluğunun her zaman birbirine eşit olması gerekmediği görülmüş olur. Ayrıca belirtmelidir ki, P_p -yoğunluğu mevcut olmayan bazı kümeler vardır (Ünver, 2015).

4.1.7. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için, $D_\varepsilon = \{r \in \mathbb{N}_0 : |x_r - \beta| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere,

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in D_\varepsilon} p_r t^r = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, yani, $\delta_{p_p}(D_\varepsilon) = 0$ oluyorsa $x = (x_r)$ dizisi β sayısına kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaktır denir ve st_{p_p} -lim $x = \beta$ ile gösterilir (Ünver ve Orhan, 2019).

Şimdi de ifade edilen tanımların ışığında bazı örnekler incelensin.

4.1.8. Örnek: (p_r) ve (x_r) dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın: $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$p_r = \begin{cases} 1, & r = k^2, \\ 0, & r \neq k^2, \end{cases}$$

ve

$$x_r = \begin{cases} 0, & r = k^2, \\ r + 1, & r \neq k^2. \end{cases}$$

Tam karelerin kümesi sıfır yoğunluklu olduğundan, sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında, yani 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde dizinin alt dizisi ıraksak olduğundan bu dizi istatistiksel yakınsak değildir. Fakat,

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in \{r \in \mathbb{N}_0 : |x_r| \geq \varepsilon\}} p_r t^r = 0$$

olduğundan $x = (x_r)$ dizisi 0 sayısına kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaktır.

Şimdi de $x = (x_r)$ dizisi $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$x_r = \begin{cases} r^2, & r = k^2, \\ 0, & r \neq k^2, \end{cases}$$

şeklinde alınırsa, $x = (x_r)$ dizisinin 0 sayısına istatistiksel yakınsak olduğu görülür. Ancak,

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in \{r \in \mathbb{N}_0 : |x_r| \geq \varepsilon\}} p_r t^r \neq 0$$

olduğundan $x = (x_r)$ dizisi 0 sayısına kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsak değildir.

Yukarıda verilen örnekler neticesinde istatistiksel yakınsaklık ile kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık arasında içerirliğin olmadığı görülür. Yani; bu iki yakınsaklık metodu karşılaştırılmaz.

Kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanarak Ünver ve Orhan (2019) aşağıdaki Korovkin tipi yaklaşım teoremini elde etmişlerdir.

4.1.9. Teorem: $L_r: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer, $e_i(x) = x^i$ olmak üzere her $i = 0, 1, 2$ için

$$st_{P_p} - \lim_{r \rightarrow \infty} \|L_r e_i - e_i\|_{C[a, b]} = 0$$

ise her $f \in C[a, b]$ için,

$$st_{P_p} - \lim_{r \rightarrow \infty} \|L_r f - f\|_{C[a, b]} = 0$$

sağlanır (Ünver ve Orhan, 2019).

4.2. Kuvvet Serisi Metodu Anlamında Equi-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel noktasal yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık ve equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları tanıtılacaktır.

U , reel sayıların kompakt bir alt kümesi ve $g, g_r \in C(U)$ olmak üzere,

$$K_r(x, \varepsilon) = \{r \in \mathbb{N} : |g_r(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$D_r(\varepsilon) = \{r \in \mathbb{N} : \|g_r - g\|_{C(U)} \geq \varepsilon\} \text{ kümeleri tanımlansın.}$$

4.2.1. Tanım: Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in U$ için,

$$\delta_{P_p}(K_r(x, \varepsilon)) = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in K_r(x, \varepsilon)} p_r t^r = 0$$

oluyorsa, (g_r) dizisi U üzerinde g fonksiyonuna kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve bu durum $g_r \rightarrow g(st_{P_p})$ ile gösterilir (Demirci vd., 2022).

4.2.2. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta_{P_p}(D_r(\varepsilon)) = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in D_r(\varepsilon)} p_r t^r = 0$$

oluyorsa, (g_r) dizisi U üzerinde g fonksiyonuna kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve bu durum $g_r \rightrightarrows g(st_{P_p})$ ile gösterilir (Demirci vd., 2022).

4.2.3. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta_{P_p}(K_r(x, \varepsilon)) = \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in K_r(x, \varepsilon)} p_r t^r = 0, (x \text{ e göre düzgün})$$

sağlanıyorsa, (g_r) dizisi U üzerinde g fonksiyonuna kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu $g_r \rightrightarrows g(e_{st_{P_p}})$ ile gösterilir (Demirci vd., 2022).

Bu tanımlar göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.4. Lemma: Eğer, $g_r \rightrightarrows g(st_{P_p})$ ise $g_r \rightrightarrows g(e_{st_{P_p}})$ ve $g_r \rightrightarrows g(e_{st_{P_p}})$ ise $g_r \rightarrow g(st_{P_p})$ olur (Demirci vd., 2022).

Şimdi de bu lemmanın tersinin her zaman doğru olmadığına dair örnekler verilsin. Bu anlamda ilk örnek kuvvet serisi metodu anlamında equi istatistiksel yakınsamanın kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel düzgün yakınsamadan daha güçlü olduğunu, ikinci örnek ise kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel noktasal yakınsamanın bu anlamda equi-istatistiksel yakınsamadan daha güçlü olduğunu göstermektedir.

4.2.5. Örnek: $U = [0,1]$, $A = \left[\frac{1}{3^{r-1}} - \frac{1}{3^r}, \frac{1}{3^{r-1}}\right]$ ve $B = \left[\frac{1}{3^r}, \frac{1}{3^{r-1}} - \frac{1}{3^r}\right]$ olsun. $\forall x \in U$ için $g(x) = 0$ ve (g_r) fonksiyon dizisi de U üzerinde, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$g_r(x) = \begin{cases} -3^r \left(x - \frac{1}{3^{r-1}} \right), & r = k^2 \text{ ve } x \in A \text{ ise} \\ 3^r \left(x - \frac{1}{3^r} \right), & r = k^2 \text{ ve } x \in B \text{ ise,} \\ 0, & r = k^2 \text{ ve } x \notin A \cup B \text{ ise,} \\ r, & r \neq k^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bunun yanı sıra,

$$p_r = \begin{cases} 1, & r \text{ bir tam kare ise,} \\ 0, & r \text{ bir tamkare değilse,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan kuvvet serisi metodu göz önüne alınsın. Böylece,

$\delta_{p_p}(\{r: r \text{ bir tamkare değilse}\}) = 0$ ve r bir tamkare ise $\forall x \in U$ için,

$$|\{r \in \mathbb{N}: |g_r(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}| \leq |\{r \in \mathbb{N}: g_r(x) \neq 0 \geq \varepsilon\}| \leq 1$$

elde edilir. O halde $\forall x \in U$ ve $r_0 \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{\{r \in \mathbb{N}: |g_r(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}} p_r t^r \leq \frac{1}{p(t)} p_{r_0} t^{r_0} \rightarrow 0 \quad (0 < t \rightarrow R^-)$$

olacağından $g_r \rightarrow g$ ($e_{st_{p_p}}$) elde edilir. Ancak, (g_r) fonksiyon dizisinin tanımından $\|g_r\|_{C(U)} = r$ olur. Dolayısıyla (g_r) fonksiyon dizisi $g = 0$ fonksiyonuna ne istatistiksel düzgün yakınsak ne de kuvvet serisi metodu anlamında düzgün yakınsak değildir.

4.2.6. Örnek: $U = [0,1]$ olsun. (g_r') fonksiyon dizisi U üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$g_r'(x) = \begin{cases} x^r, & r \text{ bir tam kare değilse,} \\ 0, & r \text{ bir tam kare ise,} \end{cases}$$

Burada $x \in U$ olmak üzere $\lim_{r \rightarrow \infty} g_r'(x) = g'(x)$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca kullanılacak kuvvet serisi metodu da,

$$p_r' = \begin{cases} 1, & r \text{ bir tam kare değilse,} \\ 0, & r \text{ bir tam kare ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde her bir $x \in U$ için,

$$\lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p'(t)} \sum_{r \in \{r \in \mathbb{N}_0: |g_r'(x) - g'(x)| \geq \varepsilon\}} p_r' t^r = 0$$

olup, $g_r' \rightarrow g'(st_{P_p})$ elde edilir. p_r' tanımından $\delta_{P_p}(\{r: r \text{ bir tam kare}\}) = 0$ olduğu görülür. r bir tam kare değilse, herhangi bir $x \in \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 1\right)$ için $\varepsilon = \frac{1}{3}$ alınırsa,

$$|g_r'(x)| = |x^r| \geq \left| \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right)^r \right| = \frac{1}{3}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{p'(t)} \sum_{r \in \{r \in \mathbb{N}_0 : |g_r'(x) - g'(x)| \geq \varepsilon\}} p_r' t^r \\ &= \lim_{0 < t \rightarrow R^-} \frac{1}{\sum_{r=0}^{\infty} p_r' t^r} \sum_{r \in \{r \in \mathbb{N}_0 : |g_r'(x) - g'(x)| \geq \varepsilon\}} p_r' t^r \neq 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$g_r \rightarrow g(st_{P_p})$$

sağlanmaz.

4.2.1. Kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi

Bu bölümde 2022 yılında Demirci, Dirik ve Yıldız tarafından kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak elde edilen Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilecektir.

4.2.1.1. Teorem: $L_r: C(U) \rightarrow C(U)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Böylece $e_i(x) = x^i$ olmak üzere her $i = 0, 1, 2$ için,

$$L_r(e_i) \rightarrow e_i(st_{P_p}) \quad (4.2.1.1)$$

sağlanıyor ise her $f \in C(U)$ için,

$$L_r(f) \rightarrow f(st_{P_p}) \quad (4.2.1.2)$$

olur (Demirci vd., 2022).

İspat: $f \in C(U)$ ve $x \in U$ olsun. f nin U üzerindeki sürekliliğinden dolayı $K = \|f\|_{C(U)}$ olmak üzere,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2K$$

eşitsizliği sağlanır. f nin U üzerindeki sürekliliğinden dolayı $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|t - x| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, t \in U$ için $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$ olur. Burada,

$$h(t) = (t - x)^2$$

seçilirse,

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} h(t) \quad (4.2.1.3)$$

sonucu elde edilir. L_r nin pozitif lineer operatör olması sebebiyle,

$$\begin{aligned} |L_r(f; x) - f(x)| &= |L_r(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_r(e_0; x) - e_0(x))| \\ &\leq L_r(|f(t) - f(x)|; x) + K|L_r(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned} \quad (4.2.1.4)$$

olur. Burada yer alan " $L_r(|f(t) - f(x)|; x)$ " terimi için gerekli hesaplamalar yapıldığında (4.2.1.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} L_r(|f(t) - f(x)|; x) &\leq L_r\left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} h(t); x\right) \\ &= \varepsilon |L_r(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2K}{\delta^2} L_r(h(t); x) + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.2.1.5)$$

elde edilir. Şimdi de " $L_r(h(t); x)$ " terimi için hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} L_r(h(t); x) &= L_r((t - x)^2; x) \\ &= L_r(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &\leq |L_r(e_2; x) - e_2(x)| + 2 \|e_1\|_{C(U)} |L_r(e_1; x) - e_1(x)| \\ &\quad + \|e_2\|_{C(U)} |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned} \quad (4.2.1.6)$$

olduğu görülür. (4.2.1.4), (4.2.1.5) ve (4.2.1.6) numaralı eşitsizlikler kullanılarak,

$$\lambda = \max \left\{ \varepsilon + K + 2K \frac{\|e_2\|_{C(U)}}{\delta^2}, 4K \frac{\|e_1\|_{C(U)}}{\delta^2}, \frac{2K}{\delta^2} \right\}$$

olmak üzere,

$$|L_r(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + \left(\varepsilon + K + 2K \frac{\|e_2\|_{C(U)}}{\delta^2} \right) |L_r(e_0; x) - e_0(x)|$$

$$\begin{aligned}
& +4K \frac{\|e_1\|_{C(U)}}{\delta^2} |L_r(e_1; x) - e_1(x)| + \frac{2K}{\delta^2} |L_r(e_2; x) - e_2(x)| \\
& \leq \lambda \{|L_r(e_0; x) - e_0(x)| + |L_r(e_1; x) - e_1(x)| \\
& \quad + |L_r(e_2; x) - e_2(x)|\} + \varepsilon
\end{aligned} \tag{4.2.1.7}$$

olduğu görülür. Herhangi bir $x \in U$ ve $i = 0, 1, 2$ için,

$$R_r(x, \varepsilon') = \{r \in \mathbb{N}_0 : |L_r(f; x) - f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

$$R_{i,r}\left(x, \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3\lambda}\right) = \left\{r \in \mathbb{N}_0 : |L_r(e_i; x) - e_i(x)| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3\lambda}\right\}$$

kümeleri tanımlansın. Böylece, (4.2.1.7) eşitsizlikten

$$R_r(x, \varepsilon') \subset \bigcup_{i=0}^2 R_{i,r}\left(x, \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3\lambda}\right)$$

sonucu elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_r(x, \varepsilon')} p_r t^r \leq \sum_{i=0}^2 \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_{i,r}\left(x, \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3\lambda}\right)} p_r t^r$$

elde edilir. O halde (4.2.1.1) hipotezleri kullanılarak U üzerinde

$$L_r(f) \rightarrow f(e_{st_{P_p}})$$

sonucuna ulaşılır ve (4.2.1.2) gösterilmiş olur.

Aşağıda 4.2.1.1. Teorem'i sağlayan fakat klasik ve kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel yakınsaklık yardımı ile verilen Korovkin teoremlerini sağlamayan bir örnek verilmiştir.

4.2.1.2. Örnek: $U = [0, 1]$, $B_r(f; x)$ de $C(U)$ üzerinde (2.3.1) ile tanımlı Beirnshtein polinomu ve (g_r) , 4.2.5. Örnek'te tanımlı fonksiyon dizisi olsun. $x \in U$ ve $f \in C(U)$

için,

$$L_r(f; x) = (1 + g_r(x))B_r(f; x) \quad (4.2.1.8)$$

tanımlansın. Ayrıca,

$$(p_r) = \begin{cases} 1, & r \text{ bir tam kare ise,} \\ 0, & r \text{ bir tam kare değilse,} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda,

$$L_r(e_0; x) = (1 + g_r(x))e_0(x)$$

$$L_r(e_1; x) = (1 + g_r(x))e_1(x)$$

$$L_r(e_2; x) = (1 + g_r(x)) \left[e_2(x) + \left(\frac{x(1-x)}{r} \right) \right]$$

olduğu görülür. 4.2.5. Örnek'ten $g_r \rightarrow g = 0$ ($e_{st_{P_p}}$) olduğundan $i = 0, 1, 2$ için,

$$L_r(e_i) \rightarrow e_i(e_{st_{P_p}})$$

elde edilir. O halde 4.2.1.1. Teorem'in koşulları sağlandığından her $f \in C(U)$ için U üzerinde

$$L_r(f) \rightarrow f(e_{st_{P_p}})$$

elde edilir. Ancak, (g_r) fonksiyon dizisi kuvvet serisi metodu anlamında istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından Ünver ve Orhan tarafından verilen 4.1.9. Teoremi sağlamaz. Benzer şekilde (g_r) fonksiyon dizisi $g = 0$ fonksiyonuna alışılmış anlamda düzgün yakınsak da olmadığından 2.3.1. Teoremi de sağlamadığı görülür. Bu durum, 4.2.1.1. Teorem'in 2.3.1. Teorem ve 4.1.9. Teorem'in önemsiz olmayan bir genellemesi olduğunu gösterir.

4.3. P_p -Equi İstatistiksel Yakınsama Oranı

Bu bölümde süreklilik modülü yardımıyla diziler için kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsama oranları incelenecektir.

Bir fonksiyonun süreklilik modülü $f \in C(U)$ ve $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(t) - f(x)| : |t - x| \leq \delta, x, t \in U\}$$

ile tanımlıdır.

4.3.1. Teorem: (L_r) , $C(U)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer,

(i) U üzerinde $L_r(e_0) \rightarrow e_0(e_{st_{P_p}})$,

(ii) $\gamma(t) = (t - x)^2$ ve $\delta_r = \delta_r(x) = \sqrt{L_r(\gamma; x)}$ olmak üzere U üzerinde,

$$\omega(f, \delta_r) \rightarrow 0(e_{st_{P_p}})$$

ise $\forall f \in C(U)$ için U üzerinde,

$$L_r(f) \rightarrow f(e_{st_{P_p}})$$

olur (Demirci vd., 2022).

İspat: $f \in C(U)$ ve $x \in U$ olsun. L_r nin ve ω süreklilik modülünün sahip olduğu özelliklerden, $K = \|f\|_{C(U)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |L_r(f; x) - f(x)| &\leq L_r(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\leq L_r\left(\left(1 + \frac{\gamma(t)}{\delta^2}\right) \omega(f, \delta); x\right) + K |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \\ &= \omega(f, \delta) L_r(e_0; x) + \frac{\omega(f, \delta)}{\delta^2} L_r(\gamma(t); x) \\ &\quad + K |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned}$$

olduğu görülür. $\delta = \delta_r := \delta_r(x) = \sqrt{L_r(\gamma; x)}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} |L_r(f; x) - f(x)| &\leq K |L_r(e_0; x) - e_0(x)| + 2\omega(f, \delta_r) \\ &\quad + \omega(f, \delta_r) |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

elde edilir. Herhangi bir $x \in U$ ve $\varepsilon' > 0$ için,

$$R_r(x, \varepsilon') = \{r \in \mathbb{N}_0 : |L_r(f; x) - f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

$$R_{1,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{3K}\right) = \left\{r \in \mathbb{N}_0 : |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \geq \frac{\varepsilon'}{3K}\right\}$$

$$R_{2,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{6}\right) = \left\{r \in \mathbb{N}_0 : \omega(f, \delta_r) \geq \frac{\varepsilon'}{6}\right\}$$

$$R_{3,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{3}\right) = \left\{r \in \mathbb{N}_0 : \omega(f, \delta_r) |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \geq \frac{\varepsilon'}{3}\right\}$$

kümeleri tanımlansın. Böylece (4.3.1) eşitsizlikten yararlanılarak

$$R_r(x, \varepsilon') \subset R_{1,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{3K}\right) \cup R_{2,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{6}\right) \cup R_{3,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{3}\right)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$R_{4,r}\left(x, \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right) = \left\{ r \in \mathbb{N}_0 : \omega(f, \delta_r) \geq \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}} \right\}$$

$$R_{5,r}\left(x, \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right) = \left\{ r \in \mathbb{N}_0 : |L_r(e_0; x) - e_0(x)| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}} \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Böylece,

$$R_r(x, \varepsilon') \subset R_{1,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{3K}\right) \cup R_{2,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{6}\right) \cup R_{4,r}\left(x, \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right) \cup R_{5,r}\left(x, \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right)$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_r(x, \varepsilon')} p_r t^r &\leq \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_{1,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{3K}\right)} p_r t^r + \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_{2,r}\left(x, \frac{\varepsilon'}{6}\right)} p_r t^r \\ &\quad + \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_{4,r}\left(x, \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right)} p_r t^r + \frac{1}{p(t)} \sum_{r \in R_{5,r}\left(x, \sqrt{\frac{\varepsilon'}{3}}\right)} p_r t^r \end{aligned}$$

olur. O halde, (i) ve (ii) hipotezlerinden U üzerinde, $\forall f \in \mathcal{C}(U)$ için,

$$L_r(f) \rightrightarrows f(e_{st_{P_p}})$$

elde edilir ve istenen gösterilmiş olur.

4.3.2. Sonuç: 4.3.1. Teorem'in (i) ve (ii) koşulları U üzerinde $e_i(x) = x^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$L_r(e_i) \rightrightarrows e_i(e_{st_{P_p}}) \quad (4.3.2)$$

ile değiştirilirse (L_r) operatörünün pozitifliği ve lineerliğinden buradan

$$L_r(\gamma(t); x) = L_r(e_2; x) - 2xL_r(e_1; x) + x^2L_r(e_0; x)$$

olup, $\lambda = 1 + 2 \|e_1\|_{\mathcal{C}(U)} + \|e_2\|_{\mathcal{C}(U)}$ olmak üzere

$$L_r(\gamma(t); x) \leq \lambda \sum_{i=0}^2 |L_r(e_i; x) - e_i(x)| \quad (4.3.3)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi de (4.3.2) ve (4.3.3) birlikte düşünüldüğünde U üzerinde,

$$\delta_r = \delta_r(x) = \sqrt{L_r(\gamma; x)} \rightarrow 0(e_{st_{P_p}})$$

elde edilir ve böylece U üzerinde,

$$\omega(f, \delta_r) \rightarrow 0(e_{st_{P_p}}) \quad (4.3.4)$$

olduğu görülür. (4.3.4) sonucu 4.3.1. Teorem'de kullanılırsa her $f \in \mathcal{C}(U)$ için U üzerinde

$$L_r(f) \rightarrow f(e_{st_{P_p}})$$

elde edilir. Böylece (4.3.2) koşulu, 4.3.1. Teorem'deki (i) ve (ii) koşullarının yerini alırsa 4.2.1.1. Teorem'deki pozitif lineer operatörler dizisi için kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık oranı elde edilir.

4.4. Voronovskaya Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu bölümde (4.2.1.8) ile tanımlı (L_r) pozitif lineer operatörler dizisi için kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bir Voronovskaya tipi yaklaşım teoremi ispatlanacaktır.

4.4.1. Lemma: $x \in [0,1]$ olsun. U üzerinde,

$$r^2 L_r((t-x)^4; x) \rightarrow 3e_2(1-e_1)^2(e_{st_{P_p}}) \quad (4.4.1)$$

olur (Demirci vd., 2022).

İspat: (L_r) pozitif lineer operatörünün tanımı göz önüne alınıp gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra

$$r^2 L_r((t-x)^4; x) = (1 + g_r(x)) \left\{ 3x^2(1-x)^2 + x \frac{(-6x^3 + 12x^2 - 7x + 1)}{r} \right\}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$|r^2 L_r((t-x)^4; x) - 3x^2(1-x)^2| \leq 12g_r(x) + (1 + g_r(x)) \frac{26}{r} \quad (4.4.2)$$

olur. O halde U üzerinde

$$g_r \rightarrow g = 0(e_{st_{P_p}})$$

olduğundan

$$12g_r(x) + (1 + g_r(x))\frac{26}{r} \rightarrow 0(e_{st_{P_p}}) \quad (4.4.3)$$

sonucuna varmak kolaydır. Dolayısıyla, (4.4.2) ve (4.4.3) sonuçları birlikte değerlendirildiğinde istenen gösterilmiş olur.

4.4.2. Teorem: Her $f \in C(U)$, $f', f'' \in C(U)$ için U üzerinde $i = 0, 1, 2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere,

$$r(L_r(f) - f) \rightarrow \frac{e_1 - e_2}{2} f''(e_{st_{P_p}})$$

olur (Demirci vd., 2022).

İspat: $x \in U$ ve $f', f'' \in C(U)$ olsun. h_x fonksiyonu,

$$h_x(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x) - f'(x)(t-x) - \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2}{(t-x)^2}, & t \neq x \\ 0, & t = x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca hipotez gereği $h_x(x) = 0$ ve $h_x(\cdot) \in C(U)$ olsun. Taylor formülü kullanılarak her $f \in C(U)$ için,

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}f''(x)(t-x)^2 + h_x(t)(t-x)^2$$

elde edilir. L_r operatörlerinin lineerliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} L_r(f; x) &= f(x)(1 + g_r(x)) + f'(x)L_r((t-x); x) \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(x)L_r((t-x)^2; x) + L_r(h_x(t)(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$L_r(f; x) = f(x)(1 + g_r(x)) + \frac{(x-x^2)(1 + g_r(x))}{2r}f''(x) + L_r(h_x(t)(t-x)^2; x)$$

sonucu elde edilir. Bu da,

$$r\{L_r(f; x) - f(x)\} = rg_r(x)f(x) + \frac{(x - x^2)(1 + g_r(x))}{2} f''(x) + rL_r(h_x(t)(t - x)^2; x) \quad (4.4.4)$$

sonucunu verir. Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliği (4.4.4) eşitliğinin sağ tarafındaki 3. terime uygulanırsa,

$$r|L_r(h_x(t)(t - x)^2; x)| \leq \left(L_r(h_x^2(t); x)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(r^2 L_r((t - x)^4; x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.5)$$

elde edilir. Ayrıca, $\varphi_x(t) = h_x^2(t)$ olmak üzere $\varphi_x(x) = 0$ ve $\varphi_x(\cdot) \in C(U)$ olduğu görülür. Öte yandan kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla elde edilen Korovkin teoremi kullanılarak U üzerinde

$$L_r(h_x^2(t); x) = L_r(\varphi_x(t); x) = \varphi_x(x) \rightarrow 0(e_{st_{P_p}}) \quad (4.4.6)$$

elde edilir. Ayrıca (4.4.1) ve (4.4.6) denklemi kullanılarak, (4.4.5) eşitsizliğinden,

$$rL_r(h_x(t)(t - x)^2; x) \rightarrow 0(e_{st_{P_p}}) \quad (4.4.7)$$

elde edilir. O halde (4.4.7), (4.4.4) ve U üzerinde $g_r \rightarrow g = 0(e_{st_{P_p}})$ olduğu göz önüne alınırsa U üzerinde

$$r(L_r(f) - f) \rightarrow \frac{e_1 - e_2}{2} f''(e_{st_{P_p}})$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında alışılmış düzgün yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklığı içeren equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı temel olarak göz önüne alınmıştır. Bunun yanı sıra equi-istatistiksel yakınsaklık tanımı lacunary istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık kavramları ile birlikte düşünülerek yeni yakınsaklık çeşitleri tanıtılmıştır. Ayrıca Abel ve Borel metodları gibi iyi bilinen metodları da içeren kuvvet serisi metodu kullanılarak kuvvet serisi metodu anlamında equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Buna ek olarak bu tanıtılan equi-istatistiksel yakınsaklık kavramları yardımı ile literatürde oldukça önemli bir yeri olan Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verilmiş ve daha güçlü sonuçlar elde edildiği örneklerle gösterilmiştir. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar kullanılarak farklı yakınsaklık türleri yardımıyla equi-istatistiksel yakınsaklık tanıtılabileceği gibi farklı uzaylarda bu yeni elde edilen yakınsaklık türleri yardımı ile Korovkin tipi teorem incelenebilir. Böylelikle daha güçlü sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Aktuğlu, H., & Gezer, H. (2009). Lacunary equi-statistical convergence of positive linear operators. *Central European Journal of Mathematics*, 7(3), 558-567. <http://doi.org/10.2478/s11533-009-0009-4>
- Balcerzak, M., Dems, K., & Komisarski, A. (2007). Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 328, 715-729. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.05.040>
- Boos, J. (2000). *Classical and modern methods in summability*. Oxford University Press. <http://dx.doi.org/10.1093/oso/9780198501657.001.0001>
- Connor, J. S. (1988). The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, 8, 47-63. <http://dx.doi.org/10.1524/anly.1988.8.12.47>
- Connor, J. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.*, 32(2), 194-198. <http://dx.doi.org/10.4153/CMB-1989-029-3>
- Demirci, K., & Orhan, C. (1999). Bounded multipliers of bounded A -statistically convergent sequences. *J. Math. Anal. Appl.*, 235(1), 122-129. <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1999.6371>
- Demirci, K., Dirik, F., & Yıldız, S. (2022). Approximation via equi-statistical convergence in the sense of power series method. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, 116, 65. <http://dx.doi.org/10.1007/s13398-021-01191-4>
- Duman, O., & Orhan, C. (2004). μ -Statistically convergent function sequences. *Czech. Math. J.*, 54, 413-422. <http://dx.doi.org/10.1023/B:CMAJ.0000042380.31622.39>
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.*, 2, 241-44. <http://dx.doi.org/10.4064/cm-2-3-4-241-244>
- Freedman, A. R., & Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2), 293-305. <http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1981.95.293>
- Freedman, A. R., Sember, J. J., & Rapheal, M. (1978). Some Cesaro type summability spaces, *Proc. London Math. Soc.*, 3(3), 508-520. <http://dx.doi.org/10.1112/plms/s3-37.3.508>
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5(4), 301-313. <http://dx.doi.org/10.1524/anly.1985.5.4.301>

- Fridy, J. A., & Orhan, C. (1992). Lacunary convergence. *Pacific J. Math.* 160(1), 43-51.
- Gadjiev, A. D., & Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.* 32, 129-138. <http://dx.doi.org/10.1216/rmjm/1030539612>
- Karakuş, S., Demirci, K., & Duman, O. (2008). Equi-statistical convergence of positive linear operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 339, 1065-1072. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.07.050>
- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, *Doklady Akad. Nauk SSSR.*, 90, 961-964
- Korovkin, P. P. (1960). Linear Operators and Approximation Theory, India, Delhi.
- Kratz, W., & Stadtmüller, U. (1989). Tauberian theorems for J_p -summability. *J. Math. Anal. Appl.* 139, 362–371. [http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(89\)90113-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(89)90113-3)
- Miller, H. I. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Trans. Amer. Math. Slovaca*, 347(5), 1811-1819. <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-1995-1260176-6>
- Miller, H. I., & Orhan, C. (2001). On almost convergent and statistically convergent subsequences. *Acta Math. Hungar.*, 93, 135-151. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1013877718406>
- Mursaleen, M. (2000). λ -statistical convergence. *Math. Slovaca*, 50, 111–115.
- Niven, I., & Zuckerman, H. S. (1980). An introduction on the theory of numbers. John Wiley & Sons, 4 th ed. New York.
- Orhan, S. (2011). İstatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremleri (Yayın No. 316511) [Yayınlanmış yüksek lisans tezi, Sinop Üniversitesi]
- Šalát, T. (1980). On Statistically Convergent Sequences of Real numbers. *Math. Slovaca*, 30(2), 139-150.
- Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, 66(5), 361-375. <http://dx.doi.org/10.1080/00029890.1959.11989303>
- Srivastava, H. M., Mursaleen, M., & Khan, A., (2012). Generalized equi-statistical convergence of positive linear operators and associated approximation theorems. *Math. Comput. Modelling*, 55, 2040–2051. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.011>

- Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 2, 73-74.
- Ünver, M. (2015). Abel summability in topological spaces. *Monatsh. Math.* 178(4), 633–643. <http://dx.doi.org/10.1007/s00605-014-0717-0>
- Ünver, M., & Orhan, C. (2019). Statistical Convergence with Respect to Power Series Methods and Applications to Approximation Theory. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 40(5), 535–547. <http://dx.doi.org/10.1080/01630563.2018.1561467>



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sevil DAĞDEVİREN

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Samsun 19 Mayıs Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, 2007

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat
Fakültesi Matematik Bölümü, 2012

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Sinop Boyabat
Anadolu Sağlık Meslek Lisesi Matematik
Öğretmeni, 2013-2017

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Sinop Merkez
Şehit Ömercan Açıkgöz Anadolu
İmamhatip Lisesi Matematik Öğretmeni,
2017-