

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



**KANAL VE DOLGU YÜZEYLERİNİN DİFERANSİYEL
GEOMETRİSİ**

ERSOY KÜNTECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDEM KOCAKUŞAKLI

SİNOP - 2025

TEZ KABUL

Ersoy KÜNTECİ tarafından hazırlanan “**KANAL VE DOLGU YÜZEYLERİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ**” başlıklı bu çalışma, 21.07.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından oybirliği ile **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Osman ATEŞ
Milli Savunma Üniversitesi / Kara Harp Okulu

İmza

**Üye
(Danışman)**

Dr. Öğr. Üyesi Erdem KOCAKUŞAKLI
Milli Savunma Üniversitesi / Kara Harp Okulu

İmza

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ONAT
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

İmza

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Onur ŞAHİN

.....

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ersoy KÜNTECİ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KANAL VE DOLGU YÜZEYLERİNİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

ERSOY KÜNTECİ

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ ERDEM KOCAKUŞAKLI

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde eğri-yüzey teorisi, kuaterniyonlar ve kanal yüzeyleri için temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, küresel gösterge eğrileri yardımı ile üretilen tüp ve kanal yüzeyleri tanıtılmıştır. Bu yüzeylerin alternatif hareketli çatıya göre parametrik denklemleri ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca parametrize edilen bu yüzeyler kuaterniyonlar yardımı ile ifade edilmiş ve örneklendirilerek grafikleri çizilmiştir. Dördüncü bölümde, tezin orijinal kısmı olan dolgu (embankment) yüzeyleri, dolgu benzeri (embankment-like) yüzeyler ve tüp dolgu benzeri (tubembankment-like) yüzeyler verilerek küresel gösterge eğrileri için alternatif hareketli çatıya göre parametrize edilmiştir. Ardından kuaterniyonlar ve matrisler yardımıyla bu yüzeyler daha basit şekilde ifade edilmiştir. Ayrıca parametrize edilen bu yüzeyler örneklendirilerek, grafikleri çizilmiştir. Son bölüm sonuç ve öneriler kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde genel bir değerlendirme yapılarak gelecek çalışmalar üzerinde durulmuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Kanal ve tüp yüzeyler; dolgu, dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeyler; kuaterniyon; alternatif hareketli çatı

ABSTRACT

MSC THESIS

DIFFERENTIAL GEOMETRIES OF THE CANAL AND EMBANKMENT SURFACES

ERSOY KÜNTECİ

**SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

SUPERVISOR:ASST. PROF. ERDEM KOCAKUŞAKLI

This thesis consists of five sections. The first section is devoted to the introduction. In the second section, the basic concepts for curve–surface theory, quaternions, and canal surfaces are introduced. In the third section, tube and canal surfaces generated by means of spherical indicatrix curves are presented. The parametric equations and properties of these surfaces are given according to the alternative moving frame. In addition, these parametrized surfaces are expressed with the help of quaternions and illustrated with examples and graphs. The fourth section, which constitutes the original part of the thesis, presents embankment surfaces, embankment-like surfaces, and tubembankment-like surfaces, which are parametrized according to the alternative moving frame for spherical indicatrix curves. Then, with the aid of quaternions and matrices, these surfaces are expressed in a simpler form. Furthermore, the parametrized surfaces are illustrated with examples and their graphs are drawn. The final section is devoted to conclusions and suggestions. In this section, a general evaluation is made and possible directions for future work are discussed.

KEYWORDS:Canal and tube surfaces; embankment, embankment-like and tubembankment-like surfaces; quaternion; alternative moving frame

TEŞEKKÜR

Öncelikle tezimin her aşamasında bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen, beni daima cesaretlendiren ve çalışmamın bu aşamaya gelmesini sağlayan saygıdeğer hocam Dr. Öğretim Üyesi Erdem Kocakuşaklı'ya teşekkürlerimi sunarım. Gerek seminer gerek tez çalışmam boyunca sarılmalarıyla beni destekleyen canım oğlum Doğa Künteci'ye, beni hayatım boyunca destekleyen sevgili annem Elmas Künteci'ye; benden desteğini hiç esirgemeyen, beni daima yüreklendiren ve bana inanan sevgili babam Hikmet Künteci'ye teşekkür ederim. Canım eşim Kübra Belin Künteci'ye bana gösterdiği sevgi, verdiği destek, cesaret özellikle de sonsuz sabrı için çok teşekkür ederim. Ayrıca değerli görüş ve önerileriyle savunma sürecime rehberlik eden jüri üyeleri Sayın Dr. Öğr. Üyesi Osman Ateş'e ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Onat'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ersoy KÜNTECİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ KABUL	ii
ETİK BEYANI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
3. KANAL VE TÜP YÜZEYLERİ.....	13
3.1. Teğetler Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Kanal Yüzeyleri	16
3.2. Normaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Kanal Yüzeyleri	21
3.3. Binormaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Kanal Yüzeyleri	26
3.4. Küresel Gösterge Eğrileri Tarafından Oluşturulan Kanal ve Tüp Yüzey Örnekleri	29
4. DOLGU VE DOLGU BENZERİ YÜZEYLER	36
4.1. Teğetler Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Dolgu ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzeyler.....	36
4.2. Normaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Dolgu ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzeyler.....	40
4.3. Binormaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Dolgu ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzeyler.....	42
4.4. Küresel Gösterge Eğrileri Tarafından Oluşturulan Dolgu Benzeri ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzey Örnekleri	44
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.4.1 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Kanal Yüzeyi.....	30
Şekil 3.4.2 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp ve Genelleştirilmiş Tüp Yüzeyleri.....	31
Şekil 3.4.3 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Kanal Yüzeyi.....	32
Şekil 3.4.4 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp ve Genelleştirilmiş Tüp Yüzeyleri.....	33
Şekil 3.4.5 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Kanal Yüzeyi.....	34
Şekil 3.4.6 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp ve Genelleştirilmiş Tüp Yüzeyleri.....	35
Şekil 4.4.1 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp Dolgu Benzeri Yüzey	46
Şekil 4.4.2 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp Dolgu Benzeri Yüzey	47
Şekil 4.4.3 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp Dolgu Benzeri Yüzey ...	48
Şekil 4.4.4 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Dolgu Benzeri Yüzey	49
Şekil 4.4.5 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Dolgu Benzeri Yüzey	50
Şekil 4.4.6 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Dolgu Benzeri Yüzey	51

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu reel vektör uzayı
E^n	: n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{H}$	: Kuaterniyonlar cümlesi
S_q	: q kuaterniyonun skaler kısmı
V_q	: q kuaterniyonun vektörel kısmı
$\bar{q}$	: q kuaterniyonun eşleniği
$\times$	: Kuaterniyon çarpımı
$\ , \ \ $	: Kuaterniyonun normu
q_0	: q kuaterniyonun normlanmışı
$\{T, N, B, \kappa, \tau\}$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında Frenet elemanları
$\langle, \rangle$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında iç çarpım
$\{N, C, W, f, g\}$	: Alternatif hareketli çatı elemanları
$\wedge$	: $\mathbb{R}^n$ uzayında vektörel çarpım
K	: Gauss eğrilik fonksiyonu
H	: Ortalama eğrilik fonksiyonu
U	: Yüzeyin normali
k_1, k_2	: Asli eğrilikler
$S(X)$	: Şekil operatörü
$X_\alpha(s, \theta)$	: α eğrisi tarafından üretilen kanal yüzeyi
$G_\alpha(s, \theta)$	: α eğrisi tarafından üretilen genelleştirilmiş tüp yüzeyi
$D_\alpha(s, \theta)$	: α eğrisi tarafından üretilen dolgu yüzeyi
$DB_\alpha(s, \theta)$	: α eğrisi tarafından üretilen dolgu benzeri yüzey
$DBT_\alpha(s, \theta)$	: α eğrisi tarafından üretilen tüp dolgu benzeri yüzey

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, eğriler ve yüzeyler arasındaki ilişkileri inceleyen temel alanlardan biri olarak, çeşitli geometrik yapılar üzerinde kapsamlı analizler yapılmasına imkân tanımaktadır. Ayrıca, uzayda tanımlı olan eğri ve yüzeylerin lokal ve global özelliklerini inceleyen temel bir matematik dalı olarak, çeşitli geometrik yapıların analizi için güçlü araçlar sunmaktadır. Bu yapıların başında, bir regüler eğri boyunca hareket eden ve belirli kurallara göre oluşturulan yüzeyler gelmektedir.

Yüzeyler teorisi, 3-boyutlu Öklid uzayında uzun süredir yoğun olarak çalışılan bir alandır. Bu çerçevede dönel yüzeyler, kanal yüzeyleri, tüp yüzeyler ve dolgu (set) yüzeyleri gibi özel yüzey türleri, geometrik anlamda büyük öneme sahiptir. Söz konusu yüzeyler, bir eğri boyunca yapılan çeşitli hareketler sonucunda oluşan zarf yüzeylerdir. Yani, bir uzay eğrisi boyunca hareket eden bir dizi küre ve koni ailesinin zarflarından elde edilen yüzeyler hem teorik hem de uygulamalı açıdan büyük önem taşımaktadır. Bu yüzeyler hem kuramsal açıdan hem de uygulamalı modelleme süreçlerinde dikkat çeken yapılar arasında yer almaktadır. Bu tür yüzeyler, sırasıyla kanal yüzeyleri ve dolgu (set) yüzeyleri olarak adlandırılır ve diferansiyel geometri literatüründe uzun süredir ilgi gören konular arasında yer almaktadır.

Kanal yüzeyleri, değişken yarıçaplı bir kürenin bir eğri boyunca hareketinden elde edilen zarf yüzeyler olarak tanımlanır ve ilk kez Monge tarafından incelenmiştir (Monge,1795). Bir kanal yüzeyi, bir regüler eğri boyunca yer değiştiren ve her noktada bu eğriye merkezleri oturan bir küre ailesinin zarflarından oluşur. Bu yüzeyler, özellikle bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD), görselleştirme, robotik ve mimari modelleme gibi birçok alanda uygulama bulmaktadır. Kanal yüzeylerinin özel durumlarından biri, yarıçap fonksiyonunun sabit olduğu *tüp yüzeyleridir*. Bu sınırlayıcı durum, birçok hesaplamayı basitleştirdiği gibi, yüzeyin geometrik özelliklerinin daha sistematik biçimde incelenmesine olanak tanır. Ayrıca, yarıçap yalnızca bir açıya bağlıysa bu yüzeyler *genelleştirilmiş tüp yüzeyler* olarak adlandırılır.

Kanal ve tüp yüzeylerinin geometrik özelliklerini anlamak, bu yüzeylerin eğrilik yapıları, parametrizasyon biçimleri ve çatı teorileri ile sıkı biçimde ilişkilidir. Özellikle Frenet ve Bishop çatıları yardımıyla bu tür yüzeylerin parametrik ifadeleri detaylandırılabilir ve

buna bağı olarak temel biçimler, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik gibi ölçütler analiz edilebilir.

Kanal ve tüp yüzeyleri gerek teorik gerekse uygulamalı açıdan geniş ölçüde araştırılmış ve çalışılmıştır. Gray bu yüzeylerin grafiksel gösterimlerini Mathematica programıyla sunmuştur (Gray,1999). Gross bu yüzeyleri analitik ve cebirsel açılardan ele almıştır (Gross, 1994). Uçum ve İlarıslan ise farklı bakış açılarıyla konuya katkı sağlamıştır (Uçum & İlarıslan 2015). Karacan, Weingarten tipi tüp yüzeyler ve geodeziklerini çeşitli uzaylarda incelemiştir (Karacan & Yaylı, 2008).

Kanal yüzeylerine benzer şekilde, *dolgu yüzeyleri* de bir eğri boyunca hareket eden konilerin oluşturduğu zarf yüzeyler olarak tanımlanır (Hartman, 2003). Dolgu yüzeyleri, her biri belirli bir noktada eğriye teğet olacak şekilde yerleştirilmiş konilerin yüzeylerinin birleşimiyle oluşur. Bu tür yüzeyler, konilerin tepe noktalarının, eksen yönlerinin ve açıklık açılarının eğriye bağı olarak değişmesine imkân tanıyarak, oldukça zengin bir geometrik çeşitlilik sunar. Ancak bu yüzeylerin parametrizasyonu kendi bileşenlerine bağı olduğundan ifade edilmesi daha zordur. Bu sebeple, değişken fonksiyonlara bağı *dolgu-benzeri yüzeyler* ile sabit fonksiyonlara bağı *tüp-dolgu-benzeri yüzeyler* literatüre kazandırılmıştır. Bu tür yüzeyler, diferansiyel geometri açısından hem daha kolay analiz edilebilir hem de uygulama alanlarında daha doğrudan kullanılabilir niteliktedir.

Bu yüzeyler, özellikle jeoloji mühendisliğinde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Yol, tünel ve baraj gibi yapıların tasarımında, zemin kaymalarını önleyici olarak tercih edilmektedir. Bu tür mühendislik yapılarına yönelik geometrik modellerin ve ifadelerin elde edilmesi, uygulamaların kolaylaştırılması açısından önemlidir.

Literatürde dolgu ve dolgu benzeri yüzeylere dair çalışmalar sınırlı sayıdadır. Önemli çalışmalardan biri, Kazan ve Karadağ tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada 3-boyutlu Öklid uzayda düzgün eğriler aracılığıyla dolgu, dolgu-benzeri ve tüp-dolgu benzeri yüzeyler incelenmiş; kuaterniyonik ifadeleri verilmiş ve Mathematica programı yardımıyla grafik çizimleri gerçekleştirilmiştir (Kazan & Karadağ, 2019). Mahmoud ve Abd ElHafez ise izotropik Weingarten dolgu yüzeylerini geometrik açıdan incelemiş, örneklerle birlikte yüzey grafiklerini sunmuşlardır (Mahmoud & Abd ElHafez, 2022).

Bir eğri boyunca tanımlanan yüzeylerin parametrik ifadeleri, homotetik hareketler ve matris temsilleri yardımıyla sadeleştirilebilir. Hamilton tarafından tanımlanan kuaterniyonlar, bu bağlamda hem ifade kolaylığı sağlar hem de hesaplamalarda pratiklik

sunar (Hamilton, 1844). Kuaterniyonların hareket geometrisinde sağladığı avantajlar, onları yüzey denklemlerinin ifadesinde vazgeçilmez kılmıştır.

Yüzeyler teorisine kuaterniyonik olarak yaklaşım birçok çalışmada benimsenmiştir: Aslan ve Yaylı, düzgün bir eğri yardımıyla oluşturulan kanal yüzeylerini kuaterniyonlarla ifade etmiştir (Aslan & Yaylı, 2016). Gök, küresel gösterge eğrileri kullanarak oluşturduğu kanal ve tüp yüzeylerin matris ve kuaterniyonik temsillerini sunmuştur (Gök, 2017). Doğan ise doktora çalışmasında bu yüzeyleri farklı uzaylarda ele alarak Bishop çatısına göre değerlendirmiştir (Doğan, 2012). Ateş ve diğerleri de bu çatıda küresel eğrilerin oluşturduğu tüp yüzeylerinin bazı özelliklerini elde etmiş ve örneklerini vermişlerdir (Ateş vd., 2018).

Bu çalışmada, regüler bir uzay eğrisi tarafından oluşturulan küre zarf ailesine dayalı kanal yüzeyleri ve bunların özel durumları olan genelleştirilmiş tüp ve tüp yüzeyleri detaylı olarak ele alınacaktır. Öncelikle, Öklid çatısı ile ilgili temel teoriler hatırlatılacak; ardından, bu çatı yardımıyla yüzeylerin parametrik tanımlamaları yapılacak ve temel geometrik özellikleri irdelenecektir. Dahası alternatif hareketli çatı tanıtılacak ve Frenet çatısı ile ilişkisi verilecektir. Yüzeyin dayanak eğrisi olan birim hızlı eğrinin Frenet çatısı yardımı ile küresel gösterge eğrileri tanımlanacaktır. Ardından, küresel gösterge eğrileri yardımıyla üretilen kanal, genelleştirilmiş tüp ve tüp yüzeyleri alternatif hareketli çatıya göre parametrize edilecektir. Diferansiyel geometride Hamilton tarafından tanımlanan reel kuaterniyonlar gerek eğri gerekse yüzey teorisinde hareketleri ifade etmekte işleri kolaylaştıran bir rol oynamaktadır. Kuaterniyonlara karşılık gelen matrisler de homotetik hareketlerde oldukça işlevseldir. Bu bakımdan oldukça fayda sağlayan bir yapıya sahiptir. Bu çalışmada da elde edilen yüzeylerin parametrik denklemi verildikten sonra doğrultman vektör yardımıyla oluşturulan birim reel kuaterniyon yüzeyleri daha kolay ifade etmemize olanak sağlayacaktır. Sonrasında bu kuaterniyona karşılık gelen matris yardımıyla yüzey denklemlerinin matris temsilleri verilecektir. Ardından, teorisi verilen bu yüzeyler örneklendirilecek ve Mathematica programı yardımıyla çizilen grafikleri verilecektir.

Ayrıca, alternatif hareketli çatıya göre, birim hızlı regüler bir eğrinin küresel göstergeleri tarafından dolgu, dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeylerin parametrizasyonları elde edilecektir. Dahası, bu elde edilen yüzey denklemleri reel kuaterniyon çarpımı ve karşılık gelen matrisler kullanılarak daha basit şekilde ifade edilecektir. Son olarak, teorik bir

şekilde ifade edilen küresel gösterge eğrilerinin oluşturduğu tüp dolgu benzeri yüzeyler örneklendirilecek ve Mathematica programı tarafından çizilen grafikleri verilecektir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel bilgilere yer verilecektir.

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde V bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall v, w \in V$ için V vektör uzayında,

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \rightarrow \langle, \rangle (v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına **iç çarpım uzayı** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.2 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

ifadesine $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin $\mathbb{R}^n$ **uzayında iç çarpımı** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3 n boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olmak üzere, V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.4 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

ifadesine $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ **uzayında vektörel çarpımı** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.5 n boyutlu E^n Öklid uzayında $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün **normu** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.6 E^n Öklid uzayında açık alt cümle J olmak üzere $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k . mertebeden bütün kısmi türevleri mevcut ve sürekli iseler f fonksiyonuna **C^k sınıfından (k .sınıftan) diferansiyellenebilirdir** denir. Özel olarak f fonksiyonu sadece sürekli ise **C^0 sınıfındandır** denir.

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f: U \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından ve } k \text{ sonlu}\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer k sonlu değil ise $C^\infty(J, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.7 $I, \mathbb{R}$ uzayının bir açık alt aralığı olmak üzere $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^{n+1}$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne, E^{n+1} uzayı içinde bir **eğri** denir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.8 M bir C^∞ manifold ve $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere,

$$A: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset E^{n+1}$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise α dönüşümüne M üzerinde **diferansiyellenebilir eğri** denir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.9 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayının üzerinde bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü ile verilsin. Burada

$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$ olmak üzere eğer $\alpha'_1(s) = \alpha'_2(s) = \dots = \alpha'_n(s) = 0$ olacak şekilde $s \in I$ değeri mevcut değilse $\alpha(s)$ eğrisine **regüler eğri** denir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.10 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayının üzerinde bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü ile verilsin.

$$\alpha'(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \dots, \alpha'_n(s))$$

şeklinde verilen ifade α eğrisinin s noktasındaki **hız vektörü** olarak adlandırılır (do Carmo, 1976).

Tanım 2.11 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlı α eğrisi verilsin. $\|\alpha'(s)\|$ uzunluğuna α eğrisinin s noktasındaki **hızı** denir. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ sağlanıyorsa α eğrisine **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** denir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.12 $M \subset E^{n+1}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için; $\alpha^{(k)} \in \text{sp}\{\psi\}$ olmak üzere ψ den elde edilen $\{T, N, \dots, N_{r-1}\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ noktasındaki **Serret-Frenet r -ayaklısı** denir. Her bir T ve N_i , $1 \leq i \leq r-1$, vektörlerine de **Serret-Frenet vektör alanı** adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Özel hal: $n = 3$ olmak üzere, 3-boyutlu E^3 Öklid uzayında Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ve $s \in I$ yay parametresi olmak üzere,

$$\vec{T}(s) = \alpha'(s)$$

$$\vec{N}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

dir. Böylece, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ sistemi, $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.13 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ ise

$$\begin{aligned}\vec{T}(s) &= \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} \\ \vec{N}(s) &= \vec{B}(s) \wedge \vec{T}(s) \\ \vec{B}(s) &= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}\end{aligned}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.14 $I, \mathbb{R}$ reel vektör uzayının bir açık aralığı olmak üzere $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde s yay parametresi ile tanımlı $\alpha(s)$ eğrisi verilsin. $\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$ olmak üzere $\alpha'(s)$ eğrisini $T(s)$ ile gösterelim. $T(s)$ şeklinde gösterilen fonksiyona $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin **birim teğet vektör alanı** denir. α eğrisinin eğriliği $\kappa(s) = \|\alpha'(s)\|$ ile tanımlanır. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ise $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin $N(s)$ birim asli normal vektörü de $\alpha''(s) = \kappa(s)N(s)$ ile verilir. $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ birim vektörüne, $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin birim binormal vektörü denir. Böylece Serret-Frenet formülü aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned}T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s)\end{aligned}$$

burada $\tau(s)$, $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin torsiyonudur (İzumiya ve Takeuchi, 2002).

Tanım 2.15 $M \in E^3$ olmak üzere $\forall p \in M$ için, M cümlesinin içinde görüntüsü p noktasının bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat parçası $(x^{-1}: x(D) \rightarrow D)$ sürekli varsa, M cümlesine bir **yüzey** denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.16 $F(x, y, z) = 0$ bir yüzey olsun. O halde λ bir parametre olmak üzere, $F(x, y, z, \lambda) = 0$ yüzeyi 1-parametrelili bir **yüzey ailesi** olur. $k \geq 2$ için F, C^k sınıfından olsun. O halde

$$\begin{aligned}F(x, y, z, \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, z, \lambda)}{\partial \lambda} &= 0\end{aligned}$$

denklemler sisteminden, λ parametresi yok edilerek elde edilen $G(x, y, z) = 0$ yüzeyine, 1-parametrelili **yüzey ailesinin zarfı** denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.17 E^3 uzayında 1-parametrelili küre ailesinin zarfına **kanal yüzeyi** denir. Alternatif olarak kanal yüzeyi, merkezlerinin yörüngesi bir $\alpha(t)$ eğrisi ve yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır (Gray, 1999).

Tanım 2.18 $S^2(t)$ kürelerinin merkezlerinin yörüngesi olan $\alpha(t)$ eğrisine kanal yüzeyinin **merkez eğrisi ya da spine eğrisi**, $r = r(t)$ fonksiyonuna ise kanal yüzeyinin **yarıçap fonksiyonu** denir (Gray, 1999).

Tanım 2.19 Bir kanal yüzeyi için yarıçap fonksiyonu $r = r(t)$ sabit ise, kanal yüzeyine **tüp** ya da **boru yüzeyi** denir (Gray, 1999).

Tanım 2.20 Bir $\Gamma(s)$ merkez eğrisi etrafında genelleştirilmiş tüpün parametrizasyonu

$$X(s, \theta) = \Gamma(s) + r(\theta)(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)), 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

şeklinde dir. Burada, $r(\theta) > 0$ iki kez türevlenebilir bir fonksiyon ve $r(0) = r(2\pi)$ şeklinde dir (Gross, 1994).

Tanım 2.21 $X: D \rightarrow E^3$ bir koordinat parçası olsun. Bu koordinat parçası $(s, \theta) \rightarrow X(s, \theta)$, s ya da θ sabit tutulduğunda bir eğri üretir. $\theta = \theta_0$ için $s \rightarrow X(s, \theta_0)$ eğrisine **s-parametre eğrisi**, $s = s_0$ için $\theta \rightarrow X(s_0, \theta)$ eğrisine **θ -parametre eğrisi** denir (Gross, 1994).

Tanım 2.22 E^n uzayının bir hiperyüzeyi M ve M yüzeyinin birim normal vektör alanı, U verilsin. E^n uzayında Riemann konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in X(M)$ için $S(X) = D_X U$ şeklinde tanımlı, S dönüşümüne U üzerinde **şekil operatörü** denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.23 $X: D \rightarrow E^3$ bir koordinat parçası, U yüzeyin normali olsun. O halde X koordinat parçasının **birinci temel formun katsayıları**,

$$g_{11} = \langle X_s, X_s \rangle$$

$$g_{12} = \langle X_s, X_\theta \rangle$$

$$g_{22} = \langle X_\theta, X_\theta \rangle$$

ve **ikinci temel formun katsayıları**,

$$L_{11} = \langle S(X_s), X_s \rangle = \langle U, X_{ss} \rangle$$

$$L_{12} = \langle S(X_s), X_\theta \rangle = \langle U, X_{s\theta} \rangle$$

$$L_{22} = \langle S(X_\theta), X_\theta \rangle = \langle U, X_{\theta\theta} \rangle$$

dir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.24 α, M yüzeyinde bir regüler eğri olsun. Eğer α'' ivme vektörü daima M yüzeyine dik ise, α eğrisine bir **geodezik eğri** denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.25 M bir yüzey ve $x(s, \theta)$, $x(0,0) = p$ ile birlikte bu yüzeyin p noktası komşuluğundaki parametrizasyonu olsun. $L_{11} = L_{11}(s, \theta)$, $L_{12} = L_{12}(s, \theta)$ ve $L_{22} = L_{22}(s, \theta)$, M yüzeyinin ikinci temel formun katsayıları olmak üzere, $\alpha \rightarrow M, \alpha(t) = x(s(t), \theta(t))$ regüler eğrisi aşağıdaki şartları sağlarsa bir asimptotik eğridir.

$$II(\alpha'(t)) = 0 \Leftrightarrow L_{11}(s')^2 + 2L_{12}s'\theta' + L_{22}(\theta')^2 = 0,$$

burada, II ile M yüzeyinin ikinci temel formu gösterilmektedir ve

$$L_{11}(s')^2 + 2L_{12}s'\theta' + L_{22}(\theta')^2 = 0$$

denklemine **asimptotik eğrilerin diferansiyel denklemi** denir (do Carmo, 1976).

Tanım 2.26 α, M yüzeyinde bir regüler eğri olsun. Eğer α'' ivme vektörü daima M yüzeyine teğet ise, α eğrisine bir **asimptotik eğri** denir (O'Neill, 1966).

Tanım 2.27 $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 3-boyutlu düzgün bir yüzey olsun. M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu, ortalama eğrilik fonksiyonu sırasıyla;

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

$$H = \frac{L_{11}g_{22} - 2L_{12}g_{12} + L_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}$$

olarak verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.28 $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler yüzeyinin, K Gauss eğrilik ve H ortalama eğrilik fonksiyonları ile asli eğrilikleri olan k_1 ve k_2 arasında

$$K = k_1 k_2$$

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Ayrıca

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

ve

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 2.29 $\mathbb{H} = \{q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$ formunda yazılan ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ ifadelerini sağlayan sayılara **reel kuaterniyon** denir (Hamilton, 1844).

q kuaterniyonun da q_1 skaler kısmı S_q ile, $q_2i + q_3j + q_4k$ vektörel kısmı da V_q ile gösterilir.

$$q = S_q + V_q$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.30 Skaler kısmı 0 olan reel kuaterniyonlara **has reel kuaterniyon** denir. Has reel kuaterniyonun yalnızca vektörel kısmı vardır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.31 p, q iki reel kuaterniyon olmak üzere

$$p \times q = (S_p + V_p)(S_q + V_q) = S_p S_q - \langle V_p, V_q \rangle + S_p V_q + S_q V_p + V_p \wedge V_q$$

şeklinde tanımlanan çarpıma **reel kuaterniyon çarpımı** denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Yani, $p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere $p \times q \neq q \times p$ dir. $p \times q = q \times p$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul V_p vektörünün, V_q vektörüne paralel olmasıdır.

Kuaterniyonlar cümlesi üzerinde çarpma işlemi, toplama işlemi üzerine dağılımlıdır. Yani, $r, p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$r \times (p + q) = r \times p + r \times q$$

$$(p + q) \times r = p \times r + q \times r$$

dir.

Kuaterniyonlar cümlesinin birleşme özelliği vardır. Yani, $r, p, q \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$(p \times q) \times r = p \times (q \times r)$$

dir.

Tanım 2.32 $q = S_q + V_q \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için

$$\bar{q} = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlanan $\bar{q}$ kuaterniyonuna **q kuaterniyonunun eşleniği** denir. Ayrıca

$$q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

şeklindedir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.33 $q = S_q + V_q, p = S_p + V_p$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{H}$ olsun. Aşağıdakiler gerçekleşir.

$$\begin{aligned}
(i) \quad \overline{(\bar{q})} &= q \\
(ii) \quad \overline{p + q} &= \bar{p} + \bar{q} \\
(iii) \quad \overline{p \times q} &= \bar{q} \times \bar{p} \\
(iv) \quad q \times \bar{q} &= \bar{q} \times q = S_q^2 + \langle V_q, V_q \rangle \quad (\text{Hacısalihoglu, 1983}).
\end{aligned}$$

Tanım 2.34 $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonu için

$$\|q\|^2 = q \times \bar{q} = \bar{q} \times q = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$$

ifadesine q **reel kuaterniyonunun normu** denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.35 Normu bir olan kuaterniyonlara **birim kuaterniyon** denir. $q \neq 0$ olmak üzere,

$$q_0 = \frac{q}{\|q\|}$$

şeklinde ifade edilir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.36 Bir kuaterniyon kutupsal formda sadece vektörel kısmı imajiner, skaler kısmı reel olan bir kompleks sayı gibi davranır. Yani, bir birim kuaterniyon, $n \in \mathbb{R}^3$ ve $n^2 = -1$ olmak üzere,

$$q = \cos \theta + n \sin \theta$$

formunda yazılabilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.37 Bir $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$ birim kuaterniyonu için,

$$M_q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dönme dönüşümüne karşılık gelen matris:

$$M_q = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_4 + 2q_2q_3 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_4 + 2q_2q_3 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_2 + 2q_3q_4 \\ -2q_1q_3 + 2q_2q_4 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

matrisidir (Özdemir, 2020).

Şimdi özel olarak alternatif hareketli çatı için Frenet çatısı ve elemanlarını verelim.

Teorem 2.38 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğri olsun.

$\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$, $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları olmak üzere bu elemanlarla tanımlanan alternatif hareketli çatının elemanları

$\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. Bu elemanlar arasındaki bağıntı

$$N(s), C(s) = \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|} \text{ ve } W(s) = \frac{1}{f(s)} \{\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)\}$$

şeklinde dir. Alternatif hareketli çatıya göre eğrilikler de;

$$f(s) = \sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)} \quad g(s) = \sigma(s)f(s)$$

olarak verilir.

$$\sigma(s) = \frac{\kappa^2(s)}{(\kappa^2(s) + \tau^2(s))^{3/2}} \left(\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} \right)'$$

ile tanımlıdır. Ayrıca alternatif hareketli çatı için türev denklemleri matris ile

$$\begin{bmatrix} N'(s) \\ C'(s) \\ W'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f(s) & 0 \\ -f(s) & 0 & g(s) \\ 0 & -g(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ C(s) \\ W(s) \end{bmatrix}$$

olarak verilir (Uzunoglu vd., 2016).



3. KANAL VE TÜP YÜZEYLERİ

Kanal yüzeyini $X(s, \theta)$ ile ifade edelim. Burada $s, \alpha(s)$ merkezinin yay parametresi olsun. Kürelerin yarıçap fonksiyonu $r(s)$ ve merkez eğrisi $\alpha(s)$ olmak üzere $m = X(s, \theta)$ noktaları için,

$$\|X(s, \theta) - \alpha(s)\| = r(s)$$

şeklindedir. $\alpha(s) \neq 0$ olduğu durumda yüzey Frenet vektörleri tarafından

$$X(s, \theta) - \alpha(s) = \lambda_1(s, \theta)T(s) + \lambda_2(s, \theta)N(s) + \lambda_3(s, \theta)B(s) \quad (3.1)$$

olarak yazılabilir. Burada λ_1, λ_2 ve λ_3 fonksiyonları, $\alpha(s)$ tanımlı olduğu aralıkta diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Kanal yüzeyi ve küreler çember boyunca birbirlerine teğet oldukları için, bu noktalardaki teğet düzlemleri aynıdır. Kürenin yer vektörü normal vektörüne eşit olduğu için kanal yüzeyin normali

$$U(s, \theta) = X(s, \theta) - \alpha(s)$$

olur. Bundan dolayı,

$$\langle X(s, \theta) - \alpha(s), X_s \rangle = 0$$

şeklindedir. $X(s, \theta)$ yüzeyinin s parametresine göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} X_s &= \alpha'(s) + \lambda_{1s}T + \lambda_1T' + \lambda_{2s}N + \lambda_2N' + \lambda_{3s}B + \lambda_3B' \\ &= T + \lambda_{1s}T + \lambda_1\kappa N + \lambda_{2s}N - \lambda_2\kappa T + \lambda_2\tau B + \lambda_{3s}B - \lambda_3\tau N \\ &= (1 + \lambda_{1s} - \lambda_2\kappa)T + (\lambda_1\kappa + \lambda_{2s} - \lambda_3\tau)N + (\lambda_{3s} + \lambda_2\tau)B \end{aligned}$$

ve

$$\|(X(s, \theta) - \alpha(s))\| = r(s) \text{ ifadesinin karesi alınır}$$

$$\langle (X(s, \theta) - \alpha(s)), (X(s, \theta) - \alpha(s)) \rangle = r^2$$

$$\lambda_1^2 \langle T, T \rangle + \lambda_2^2 \langle N, N \rangle + \lambda_3^2 \langle B, B \rangle = r^2$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r^2 \quad (3.2)$$

elde edilir. Şimdi (3.2) eşitliğinin s parametresine göre kısmi türevi alınır

$$\lambda_1\lambda_{1s} + \lambda_2\lambda_{2s} + \lambda_3\lambda_{3s} = rr' \quad (3.3)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle X(s, \theta) - \alpha(s), X_s \rangle &= (\lambda_1 + \lambda_1\lambda_{1s} - \lambda_1\lambda_2\kappa) \langle T, T \rangle + (\lambda_1\lambda_2\kappa + \lambda_2\lambda_{2s} - \lambda_2\lambda_3\tau) \langle N, N \rangle \\ &\quad + (\lambda_3\lambda_{3s} + \lambda_2\lambda_3\tau) \langle B, B \rangle \\ &= \lambda_1 + \lambda_1\lambda_{1s} - \lambda_1\lambda_2\kappa + \lambda_1\lambda_2\kappa + \lambda_2\lambda_{2s} - \lambda_2\lambda_3\tau + \lambda_3\lambda_{3s} \\ &\quad + \lambda_2\lambda_3\tau \\ &= \lambda_1 + \lambda_1\lambda_{1s} + \lambda_2\lambda_{2s} + \lambda_3\lambda_{3s} = 0 \end{aligned}$$

(3.3) eşitliği kullanılarak

$$\lambda_1 + rr' = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\lambda_1 = -rr' \quad (3.4)$$

bulunur.

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r^2$$

eşitliği (3.4) yardımıyla

$$\begin{aligned} \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= r^2 - r^2 r'^2 \\ &= r^2 (1 - r'^2) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Trigonometrik özdeşlikler yardımıyla λ_2 ve λ_3 fonksiyonları aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \pm r \sqrt{1 - r'^2} \cos \theta \\ \lambda_3 &= \pm r \sqrt{1 - r'^2} \sin \theta \end{aligned}$$

Dolayısıyla $X(s, \theta)$ kanal yüzeyinin parametrizasyonu

$$X(s, \theta) = \alpha(s) - r(s)r'(s)T(s) \pm r(s)\sqrt{1 - r'^2}(s)(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s))$$

olarak verilir. Eğer $r(s)$ yarıçap fonksiyonu sabit olarak alınırsa bu yüzey tüp yüzeyi olarak adlandırılır ve parametrizasyonu

$$X(s, \theta) = \alpha(s) \pm r(s)(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)) \quad (3.5)$$

şeklindedir (Gray, 1999).

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet elemanları olan $\{T, N, B\}$ vektörlerini yay parametreleri ile küre üzerinde düşünölsün. Bu vektörler küre üzerinde birim hızlı eğriler olurlar ve $\alpha(s)$ eğrisinin küresel gösterge eğrileri olarak adlandırılırlar.

$$\beta: I_\beta \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset E^3, \beta(s_\beta) = \beta(\varphi_T(s)) = T(s)$$

teğetler gösterge eğrisi olsun. $\varphi_T: I \rightarrow I_\beta, s_\beta = \varphi_T(s) = \int \kappa(s) ds$ fonksiyonu C^∞ sınıfından regüler bir fonksiyondur. Benzer şekilde, asli normaller gösterge eğrisi

$$\gamma: I_\gamma \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset E^3, \gamma(s_\gamma) = \gamma(\varphi_N(s)) = N(s)$$

ve binormaller gösterge eğrisi

$$\delta: I_\delta \subset \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset E^3, \delta(s_\delta) = \delta(\varphi_B(s)) = B(s)$$

şeklindedir.

Ayrıca,

$$\varphi_N: I \rightarrow I_\gamma, s_\gamma = \varphi_N(s) = \int \kappa(s) \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2(s)} ds$$

ve

$$\varphi_B: I \rightarrow I_\delta, s_\delta = \varphi_B(s) = \int \tau(s) ds$$

C^∞ sınıfından regüler fonksiyonlardır.

Bir sonraki bölümde, küresel gösterge eğrilerini kullanarak kanal yüzeyleri için yeni bir yaklaşım sunacağız. Bununla birlikte; Frenet çatısı bu fikir için çok kullanışlı değildir. Çünkü kanal yüzeyleri, merkez eğrisinin teğetine dik olan vektörlerin gerdiği düzlemdeki çemberler yardımıyla oluşturulur. Gösterge eğrilerinin teğet vektörlerine dik vektörlerin hesaplanmasında kolaylık sağladığı için biz alternatif hareketli çatıyı kullanacağız. Alternatif hareketli çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ şeklindedir. Bu çatıya göre yüzeyleri karakterize ettikten sonra, bu yüzeyler birim kuaterniyon ve homotetik hareketler ile ifade edilecektir. Yüzeyleri kuaterniyonlar yardımı ile ifade ederken $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uzayında

$$q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$$

ve

$$q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$$

birim kuaterniyonlarını kullanacağız.

3-boyutlu Öklid uzayında bir parametrelili homotetik hareket,

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümüyle verilir (Blaschke, 1956).

Burada Y ve X sırasıyla R' sabit uzayının ve R hareketli uzayının aynı noktasının konum vektörleridir. Ayrıca h , A ve Z sırasıyla homotetik skaler, ortogonal matris ve doğrultman vektörü olarak adlandırılır. Bunlar s parametresine göre sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlardır.

Ayrıca denklem ifadelerini kolaylaştırmak ve kısaltmak için

$$\xi(s) = r(s)r'(s),$$

$$\eta(s) = \pm \sqrt{1 - (r'(s))^2}$$

olarak alınacaktır.

3.1. Teğetler Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Kanal Yüzeyleri

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. Teğetler gösterge eğrisi $\beta(\varphi_T(s))$ olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin birim normal vektörü $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ olmak üzere

$$q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$$

reel kuaterniyonu $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uzayında bir fonksiyondur. $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonunun M_N matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) & -\sin\theta(\cos\theta n_3 - \sin\theta n_1 n_2) & 2\sin\theta(\cos\theta n_2 + \sin\theta n_1 n_3) \\ 2\sin\theta(\cos\theta n_3 + \sin\theta n_1 n_2) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_2^2 - n_1^2 - n_3^2) & 2\sin\theta(\sin\theta n_2 n_3 - \cos\theta n_1) \\ 2\sin\theta(\sin\theta n_1 n_3 - \cos\theta n_2) & 2\sin\theta(\cos\theta n_1 + \sin\theta n_2 n_3) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_3^2 - n_2^2 - n_1^2) \end{bmatrix}$$

olarak verilir. $N(s)$, M_N matrisinin dönme eksenidir ve $M_N N(s) = N(s)$ şeklindedir.

Teorem 3.1.1 $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\beta(s, \theta)$ kanal yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \xi(s)N(s) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (3.1.1)$$

olarak verilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s) \quad (3.1.2)$$

olarak verilir (Gök, 2017).

İspat $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan bir kanal yüzeyi olsun. O halde

$$X(s, \theta) = \alpha(s) - \xi(s)T(s) \pm \eta(s)(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$$

denklemini kullanarak

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \xi(s)T(s) \pm \eta(s)(\cos\theta C(s) + \sin\theta W(s)) \quad (3.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$ birim reel kuaterniyon olmak üzere $C(s)$ vektörü de has reel kuaterniyon olarak düşünülürse kuaterniyon çarpımının tanımı gereği

$q_N(s, \theta) \times C(s) = \cos\theta C(s) + \sin\theta W(s)$ şeklindedir. Eğer (3.1.3) eşitliği ele

alınırsa, (3.1.1) denklemi elde edilir. Diğer taraftan,

$\beta(\varphi_T(s)) - \xi(s)N(s), \eta(s)$ ve M_N sırasıyla homotetik hareketin doğrultman vektörü, homotetik skaler ve ortogonal matrisi olarak tanımlanırsa, denklem (3.1.2) homotetik harekettir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.2 $\beta(\varphi_T(s))$ teğet gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin ve $G_\beta(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$\begin{aligned} X_\beta(s, \theta) &= \beta(\varphi_T(s)) + r q_N(s, \theta) \times C(s), \\ G_\beta(s, \theta) &= \beta(\varphi_T(s)) + r(\theta) q_N(s, \theta) \times C(s) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla;

$$\begin{aligned} X_\beta(s, \theta) &= \beta(\varphi_T(s)) + r M_N C(s), \\ G_\beta(s, \theta) &= \beta(\varphi_T(s)) + r(\theta) M_N C(s) \end{aligned}$$

olarak verilir (Gök, 2017).

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi olsun. $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyini düşünelim.

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + r(\cos \theta C(s) + \sin \theta W(s)) \quad (3.1.4)$$

şeklinde ifade edilir. Yüzeyin kısmi türevleri

$$\begin{aligned} (X_\beta)_s &= T'(s) + r \cos \theta C'(s) + r \sin \theta W'(s), \\ (X_\beta)_s &= (\kappa(s) - r f(s) \cos \theta) N(s) + (-r g(s) \sin \theta) C(s) + (r g(s) \cos \theta) W(s), \\ (X_\beta)_\theta &= -r \sin \theta C(s) + r \cos \theta W(s), \\ (X_\beta)_{ss} &= (\kappa'(s) - r f(s) \cos \theta + r f(s) g(s) \sin \theta) N(s) \\ &\quad + (\kappa(s) f(s) - r f^2(s) \cos \theta - r g'(s) \sin \theta - r g^2(s) \cos \theta) C(s) \\ &\quad + (-r g^2(s) \sin \theta + r g'(s) \cos \theta) W(s), \\ (X_\beta)_{s\theta} &= r f(s) \sin \theta N(s) - r g(s) \cos \theta C(s) - r g(s) \sin \theta W(s), \\ (X_\beta)_{\theta\theta} &= -r \cos \theta C(s) - r \sin \theta W(s) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin normal vektörü yukarıdaki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} U_\beta &= \frac{(X_\beta)_s \wedge (X_\beta)_\theta}{\|(X_\beta)_s \wedge (X_\beta)_\theta\|} \\ &= \cos \theta C(s) + \sin \theta W(s) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

I ve *II*. temel form katsayıları aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$\begin{aligned} g_{11\beta} &= r^2 g^2(s) + \{\kappa(s) - rf(s)\cos\theta\}^2, \\ g_{12\beta} &= r^2 g(s), g_{22\beta} = r^2, \\ L_{11\beta} &= -r^2 g(s) + f(s)\cos\theta\{\kappa(s) - rf(s)\cos\theta\}, \\ L_{12\beta} &= -rg(s), L_{22\beta} = -r. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Önerme 3.1.3 $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan tüp yüzeyi olsun. $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi regülerdir ancak ve ancak $\{\kappa(s) - rf(s)\cos\theta\} = 0$ (Ateş vd., 2018).

İspat Herhangi bir regüler yüzey için $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$ koşulu vardır. (3.1.5) denklemlerini kullanarak, $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi için

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)_\beta = r^2\{\kappa(s) - rf(s)\cos\theta\}^2$$

elde ederiz. $r > 0$ olduğundan,

$$\kappa(s) - rf(s)\cos\theta \neq 0$$

olduğu açıktır.

Tersine, varsayımımız doğru ise yüzeyin regüler olduğu kolayca görülür.

Sonuç 3.1.4 $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyinin Gauss, ortalama eğrilik fonksiyonları ve asli eğrilikleri aşağıdaki gibidir.

$$K_\beta = \frac{-f(s)\cos\theta}{r(\kappa(s) - rf(s)\cos\theta)}, \quad H_\beta = -\frac{1}{2}\left(rK_\beta + \frac{1}{r}\right),$$

ve

$$(k_1)_\beta = \frac{f(s)\cos\theta}{\kappa(s) - rf(s)\cos\theta}, \quad (k_2)_\beta = -\frac{1}{r}$$

şeklinde verilir (Ateş vd., 2018).

Teorem 3.1.5 $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyi olsun. $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin parametre eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisi asimptotik eğridir ancak ve ancak

$$\sigma^2(s)f(s) = -\frac{1}{r}\cos\theta\{\kappa(s) - rf(s)\cos\theta\}, \quad |\kappa(s)| \geq 2r|g(s)| \quad (3.1.6)$$

şeklindedir.

(ii) $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi asimptotik bir eğri olamaz (Ateş vd., 2018).

İspat (i) Bir δ uzay eğrisi, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey üzerinde asimptotik bir eğridir ancak ve ancak eğrinin normal vektörü δ'' her noktada yüzeye teğettir. Yani $\langle U_\beta, \delta'' \rangle = 0$.

Dolayısıyla

$$\langle U_\beta, (X_\beta)_{ss} \rangle = -r^2 g(s) + f(s) \cos \theta \{ \kappa(s) - rf(s) \cos \theta \} = 0$$

şeklindedir. Bu son denklemi kullanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa, s parametre eğrisi için (3.1.6) denklemi elde edilir. Dolayısıyla bu denklem altında $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin s parametre eğrisi asimptotik bir eğridir.

(ii) $\langle U_\beta, (X_\beta)_{\theta\theta} \rangle = -r \neq 0$ olduğu kabul edilirse $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin θ parametre eğrisi asimptotik bir eğri olamaz.

Teorem 3.1.6 $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyi olsun. Yüzeyin s ve θ parametre eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisi geodezik eğridir ancak ve ancak

$$r^2 g^2 + (\kappa - rf \cos \theta)^2 \text{ ifadesi sabittir.}$$

(ii) $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi her zaman bir geodezik eğridir (Ateş vd., 2018).

İspat (i) Bir δ uzay eğrisi ancak ve ancak δ'' ve U_β vektörleri lineer bağımlı ise geodezik eğridir. Yani $U_\beta \wedge \delta'' = 0$ koşulu sağlandığı durumda geodeziktir. Bu durumda yüzeyin s parametre eğrisi için

$$\begin{aligned} U_\beta \wedge (X_\beta)_{ss} &= [rg' - f\kappa \sin \theta + rf^2 \sin \theta \cos \theta]N \\ &\quad + [\sin \theta (\kappa' - rf' \cos \theta + rfg \sin \theta)]C \\ &\quad + [-\cos \theta (\kappa' - rf' \cos \theta + rfg \sin \theta)]W \end{aligned}$$

hesaplanır. Burada $\{N, C, W\}$ ortogonal bir sistem ve $U_\beta \wedge (X_\beta)_{ss} = 0$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned} rg' - f\kappa \sin \theta + rf^2 \sin \theta \cos \theta &= 0, \\ \sin \theta (\kappa' - rf' \cos \theta + rfg \sin \theta) &= 0, \\ -\cos \theta (\kappa' - rf' \cos \theta + rfg \sin \theta) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Son iki denklemi kullanarak

$$\kappa' - rf' \cos \theta + rfg \sin \theta = 0$$

elde ederiz. Bu denklem

$$rg' - f\kappa \sin \theta + rf^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

denklemleri ile birlikte göz önüne alınırsa

$$r^2 g^2 + (\kappa - r f \cos \theta)^2$$

ifadesinin sabit olması gerektiği elde edilir.

(ii) θ parametre eğrisinin geodezik eğri olması için $U_\beta \wedge (X_\beta)_{\theta\theta} = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlik her zaman sağlandığından dolayı, $X_\beta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin θ parametre eğrisi her zaman bir geodezik eğridir.

Minimal yüzeyler sıfır ortalama eğriliği ile karakterize edilir. Her yüzey bir minimal yüzey olamaz, ancak bu tür yüzeylerde minimal noktalar bulabiliriz. Ek olarak, yüzeyde minimal noktalar içeren minimal eğri adı verilen bir eğri vardır.

Tanım 3.1.7 M bir yüzey olsun. Bu yüzey üzerindeki hiperbolik nokta minimal noktadır ancak ve ancak bu noktada

$$g_{11}L_{22} + g_{22}L_{11} - 2L_{12}g_{12} = 0 \quad (3.1.7)$$

eşitliği sağlanır (Şemin, 1983).

Teorem 3.1.8 $X(s, \theta)$ yüzeyi (3.5) denklemi ile verilen regüler bir tüp yüzeyi olsun. Bu yüzeyin minimal eğrileri

$$\delta(s) = \alpha(s) + r(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)),$$

olmak üzere

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2r\kappa(s)}\right), \kappa(s) \neq 0$$

koşulu sağlanır (Ateş vd., 2018).

İspat (3.5) denklemiyle verilen regüler tüp yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları (3.1.7) eşitliği göz önüne alındığında

$$2r^2\kappa^2(s)\cos^2\theta - 3r\kappa(s)\cos\theta + 1 = 0$$

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2r\kappa(s)}\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.9 $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi (3.1.4) denklemi ile verilen regüler tüp yüzeyi olsun. Bu yüzeyin minimal eğrileri

$$\delta_T(s) = \beta(\varphi_T(s)) + r\{\cos \theta C(s) + \sin \theta W(s)\}$$

olmak üzere

$$\theta = \arccos\left(\frac{\kappa(s)}{2rf(s)}\right) \text{ ve } \varphi_T(s) = \int \kappa(s) ds$$

koşulu sağlanır (Ateş vd., 2018).

İspat $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi (3.1.4) denklemi ile verilen regüler bir tüp yüzey olsun. Minimal eğrilerini bulmak için (3.1.5) ve (3.1.7) eşitlikleri kullanılarak

$$2r^2f^2(s)\cos^2\theta - 3rf(s)\kappa(s)\cos\theta + \kappa^2(s) = 0$$

elde edilir. $X_\beta(s, \theta)$ yüzeyi regüler olduğundan direkt hesaplamalar ile

$$\theta = \arccos\left(\frac{\kappa(s)}{2rf(s)}\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2. Normaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Kanal Yüzeyleri

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. Normaller gösterge eğrisi $\gamma(\varphi_N(s))$ olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin birim vektörü $C(s) = \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|} = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$ olmak üzere

$$q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$$

reel kuaterniyonu $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uzayında bir fonksiyondur. $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonunun M_C matris gösterimi

$$M_C = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta(c_1^2 - c_2^2 - c_3^2) & -2\sin\theta(\cos\theta c_3 - \sin\theta c_1 c_2) & 2\sin\theta(\cos\theta c_2 + \sin\theta c_1 c_3) \\ 2\sin\theta(\cos\theta c_3 + \sin\theta c_1 c_2) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(c_2^2 - c_1^2 - c_3^2) & 2\sin\theta(\sin\theta c_2 c_3 - \cos\theta c_1) \\ 2\sin\theta(\sin\theta c_1 c_3 - \cos\theta c_2) & 2\sin\theta(\cos\theta c_1 + \sin\theta c_2 c_3) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(c_3^2 - c_2^2 - c_1^2) \end{bmatrix}$$

olarak verilir. $C(s)$, M_C matrisinin dönme eksenidir ve $M_C C(s) = C(s)$ şeklindedir.

Teorem 3.2.1 $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\gamma(s, \theta)$ kanal yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \xi(s)C(s) \pm \eta(s)q_C(s, \theta) \times W(s) \quad (3.2.1)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \xi(s)C(s) \pm \eta(s)M_C W(s) \quad (3.2.2)$$

olarak verilir (Gök, 2017).

İspat $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi, $\gamma(\varphi_N(s))$ normal gösterge eğrisi tarafından oluşturulan bir kanal yüzey olsun.

$$X(s, \theta) = \alpha(s) - \xi(s)T(s) \pm \eta(s)(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$$

denklemini kullanılarak

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \xi(s)C(s) \pm \eta(s)(\cos\theta W(s) + \sin\theta N(s))$$

olarak verilir.

Birim kuaterniyon $q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$ ve has kuaterniyon $C(s)$ için kuaterniyon çarpımının tanımı $q_C(s, \theta) \times W(s) = \cos\theta W(s) + \sin\theta N(s)$ şeklindedir.

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \xi(s)C(s) \pm \eta(s)(\cos\theta W(s) + \sin\theta N(s))$$

denklemini ele alırsak, (3.2.1) denklemini elde ederiz.

Diğer taraftan, $\gamma(\varphi_N(s)) - \xi(s)C(s), \eta(s)$ ve M_C sırasıyla homotetik hareketin doğrultman vektörü, homotetik skaler ve ortogonal matrisi olarak tanımlanırsa, o zaman

(3.2.2) denklemi homotetik harekettir. Bu şekilde ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.2 $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\gamma(s, \theta)$ tüp yüzeyi ve $G_\gamma(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r q_C(s, \theta) \times W(s),$$

$$G_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r(\theta) q_C(s, \theta) \times W(s)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r M_C W(s),$$

$$G_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r(\theta) M_C W(s)$$

olarak verilir (Gök, 2017).

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri, asli normaller gösterge eğrisi $\gamma(\varphi_N(s))$ olsun. $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\gamma(s, \theta)$ tüp yüzeyini düşünelim.

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta W(s)) \quad (3.2.3)$$

şeklinde ifade edilir. Yüzeyin kısmi türevleri

$$(X_\gamma)_s = N'(s) + r \cos\theta N'(s) + r \sin\theta W'(s),$$

$$(X_\gamma)_s = (f(s) + r f(s) \cos\theta - r g(s) \sin\theta) C(s),$$

$$(X_\gamma)_\theta = -r \sin\theta N(s) + r \cos\theta W(s),$$

$$(X_\gamma)_{ss} = (-f^2(s) - r f^2(s) \cos\theta + r f(s) g(s) \sin\theta) N(s)$$

$$+ (f'(s) + r f(s) \cos\theta - r g'(s) \sin\theta) C(s)$$

$$+ (f(s) g(s) + r f(s) g(s) \cos\theta - r g^2(s) \sin\theta) W(s),$$

$$(X_\gamma)_{s\theta} = (-r f(s) \sin\theta - r g(s) \cos\theta) C(s),$$

$$(X_\gamma)_{\theta\theta} = -r \cos\theta N(s) - r \sin\theta W(s)$$

olarak hesaplanır. $X_\gamma(s, \theta)$ tüp yüzeyinin normal vektörü yukarıdaki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} U_\gamma &= \frac{(X_\gamma)_s \wedge (X_\gamma)_\theta}{\|(X_\gamma)_s \wedge (X_\gamma)_\theta\|} \\ &= \cos \theta N(s) + \sin \theta W(s) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

I ve *II*. temel form katsayıları aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$\begin{aligned} g_{11\gamma} &= \{f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta\}^2, \\ g_{12\gamma} &= 0, g_{22\gamma} = r^2, \\ L_{11\gamma} &= \{f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta\}\{-f(s)\cos\theta + g(s)\sin\theta\}, \\ L_{12\gamma} &= 0, L_{22\gamma} = -r. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Önerme 3.2.3 $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzey olsun. $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi regülerdir ancak ve ancak

$$f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta \neq 0 \text{ (Ateş vd., 2018).}$$

İspat Herhangi bir regüler yüzeyi için $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$ koşulu vardır. (3.2.4) denklemlerini kullanarak

$$(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)_\gamma = r^2\{f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta\}^2$$

elde ederiz. $r > 0$ olduğundan

$$f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta \neq 0$$

olduğu açıktır.

Tersine, eğer ilgili varsayım doğru ise yüzeyin regüler olduğunu kolayca görebiliriz.

Sonuç 3.2.4 $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyinin Gauss, ortalama eğrilik fonksiyonları ve asli eğrilikleri aşağıdaki gibidir.

$$K_\gamma = \frac{f(s)\cos\theta - g(s)\sin\theta}{r(f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta)}, \quad H_\gamma = -\frac{1}{2}\left(rK_N + \frac{1}{r}\right),$$

ve

$$(k_1)_\gamma = -\frac{1}{r}, \quad (k_2)_\gamma = -\frac{f(s)\cos\theta - g(s)\sin\theta}{f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta}$$

şeklinde verilir (Ateş vd., 2018).

İspat Eğrilikler (3.2.4) denklemleri kullanılarak kolayca hesaplanabilir.

Teorem 3.2.5 $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzey olsun. $X_\gamma(s, \theta)$ tüp yüzeyinin s ve θ parametre eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisinin asimptotik bir eğri olması için gerek ve yeter şart slant helis olmasıdır.

(ii) $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi asimptotik bir eğri olamaz (Ateş vd., 2018).

İspat (i) $X_\gamma(s, \theta)$ tüp yüzeyinin s parametre eğrisinin asimptotik bir eğri olduğunu varsayalım. O zaman

$$\langle U_\gamma, (X_\gamma)_{ss} \rangle = \{g(s)\sin\theta - f(s)\cos\theta\}\{f(s) + rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta\} = 0$$

denklemleri yardımıyla $\sigma(s) = \cot\theta$ elde ederiz. $\sigma(s)$ sabit bir fonksiyon olduğundan, α eğrisi slant helistir.

Tersine, α eğrisinin slant helis olduğu kabul edilirse, $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisinin asimptotik bir eğri olduğu görülebilir.

(ii)

$$\langle U_\gamma, (X_\gamma)_{ss} \rangle = -r \neq 0$$

ifadesini kullanırsak, $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi asimptotik bir eğri olamaz.

Teorem 3.2.6 $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyi olsun.

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta W(s))$$

denklemindeki bu yüzeyin s ve θ parametre eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisi geodezik eğridir ancak ve ancak α eğrisi slant helistir.

(ii) $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi bir geodezik eğridir (Ateş vd., 2018).

İspat (i) Bir δ uzay eğrisi ancak ve ancak δ'' ve U_γ vektörleri lineer bağımlı ise geodezik eğridir. Yani $U_\gamma \wedge \delta'' = 0$ koşulu sağlandığı durumda geodeziktir. Bu durumda yüzeyin s parametre eğrisi için

$$\begin{aligned} U_\gamma \wedge (X_\gamma)_{ss} &= [-\sin\theta(f' + rf'\cos\theta - rg'\sin\theta)]N \\ &\quad + [-(g\cos\theta + f\sin\theta)(f + rf\cos\theta - rg\sin\theta)]C \\ &\quad + [\cos\theta(f' + rf'\cos\theta - rg'\sin\theta)W] \end{aligned}$$

$\{N, C, W\}$ bir ortogonal sistem ve $U_\gamma \wedge (X_\gamma)_{ss} = 0$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\sin\theta(f' + rf'\cos\theta - rg'\sin\theta) &= 0, \\
(g\cos\theta + f\sin\theta)(f + rf\cos\theta - rg\sin\theta) &= 0, \\
\cos\theta(f' + rf'\cos\theta - rg'\sin\theta) &= 0
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Son eşitlikteki birinci ve üçüncü denklemlerden,

$$f' + rf'\cos\theta - rg'\sin\theta = 0$$

elde ederiz. Bu denklemleri birlikte göz önüne alırsak

$$f + rf\cos\theta - rg\sin\theta$$

ifadesinin sabit olması gerektiği elde edilir.

Son denklemi ve (3.2.5) denklemini birlikte çözerek aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$g\cos\theta + f\sin\theta = 0$$

$\sigma(s) = \tan\theta$ eşitliğinin sabit olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, α eğrisi slant helistir.

(ii) Geodezik eğri tanımı kullanarak, θ parametrelili eğri için $U_\gamma \wedge (X_\gamma)_{\theta\theta} = 0$ elde edilir.

Bu nedenle yüzeydeki θ parametrelili eğri her zaman geodezik bir eğridir.

Teorem 3.2.7 $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyinin minimal eğrileri şunlardır:

$$\delta_N(s) = \gamma(\varphi_N(s)) + r\{\cos\theta N(s) + \sin\theta W(s)\}$$

ve

$$\varphi_N(s) = \int f(s) ds \text{ ve } \theta = \arccos\left(\left(\frac{-f \pm |g|\sqrt{r^2f^2 + r^2g^2 - 1}}{r(f^2 + g^2)}\right)(s)\right)$$

$f(s) \geq \frac{1}{r}$ koşulu sağlanır (Ateş vd., 2018).

İspat

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta W(s))$$

ile verilen $X_\gamma(s, \theta)$ tüp yüzeyin (3.1.7) eşitliğini sağlayan minimal eğrilerini göz önünde bulunduralım. Bundan dolayı

$$\{rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta + 1\}\{rf(s)\cos\theta - rg(s)\sin\theta + f(s)\} = 0$$

elde edilir. $X_\gamma(s, \theta)$ yüzeyi regüler olduğundan

$$\theta = \arccos\left(\left(\frac{-f \pm |g|\sqrt{r^2f^2 + r^2g^2 - 1}}{r(f^2 + g^2)}\right)(s)\right)$$

elde edilir.

3.3. Binormaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Kanal Yüzeyleri

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. Binormaller gösterge eğrisi $\delta(\varphi_B(s))$ olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin birim normal vektörü $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ olmak üzere

$$q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$$

reel kuaterniyonu $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uzayında bir fonksiyondur. $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonunun M_N matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) & -\sin\theta(\cos\theta n_3 - \sin\theta n_1 n_2) & 2\sin\theta(\cos\theta n_2 + \sin\theta n_1 n_3) \\ 2\sin\theta(\cos\theta n_3 + \sin\theta n_1 n_2) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_2^2 - n_1^2 - n_3^2) & 2\sin\theta(\sin\theta n_2 n_3 - \cos\theta n_1) \\ 2\sin\theta(\sin\theta n_1 n_3 - \cos\theta n_2) & 2\sin\theta(\cos\theta n_1 + \sin\theta n_2 n_3) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_3^2 - n_2^2 - n_1^2) \end{bmatrix}$$

olarak verilsin. $N(s)$, M_N matrisinin dönme eksenidir ve $M_N N(s) = N(s)$ şeklindedir.

Teorem 3.3.1 $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\delta(s, \theta)$ kanal yüzeyinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) - \xi(s)N(s) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) - \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s)$$

olarak verilir (Gök, 2017).

İspat Önceki bölümlerdeki ispatlara benzer şekilde ispatı kolayca yapabiliriz.

Sonuç 3.3.2 $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\delta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin ve $G_\delta(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + r q_N(s, \theta) \times C(s),$$

$$G_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + r(\theta) q_N(s, \theta) \times C(s)$$

olarak verilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla;

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + r M_N C(s),$$

$$G_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + r(\theta) M_N C(s)$$

olarak verilir (Gök, 2017).

$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri, binormaller gösterge eğrisi $\delta(\varphi_B(s))$ olsun. $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\delta(s, \theta)$ tüp yüzeyini düşünelim.

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + r(\cos \theta C(s) + \sin \theta W(s))$$

şeklinde ifade edilir. Yüzeyin kısmi türevleri

$$(X_\delta)_s = B'(s) + r \cos \theta C'(s) + r \sin \theta W'(s),$$

$$(X_\delta)_s = (-\tau(s) - rf(s) \cos \theta)N(s) + (-rg(s) \sin \theta)C(s) + (rg(s) \cos \theta)W(s)$$

$$(X_\delta)_\theta = -r \sin \theta C(s) + r \cos \theta W(s),$$

$$(X_\delta)_{ss} = (-\tau'(s) - rf'(s) \cos \theta + rf(s)g(s) \sin \theta)N(s)$$

$$+ (-\tau(s)f(s) + (-rf^2(s) - rg^2(s)) \cos \theta - rg'(s) \sin \theta)C(s)$$

$$+ (-rg^2(s) \sin \theta + rg' \cos \theta)W(s),$$

$$(X_\delta)_{s\theta} = (rf(s) \sin \theta)N(s) + (-rg(s) \cos \theta)C(s) + (-rg(s) \sin \theta)W(s),$$

$$(X_\delta)_{\theta\theta} = -r \cos \theta C(s) - r \sin \theta W(s)$$

olarak hesaplanır. $X_\delta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin normal vektörü yukarıdaki eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} U_\delta &= \frac{(X_\delta)_s \wedge (X_\delta)_\theta}{\|(X_\delta)_s \wedge (X_\delta)_\theta\|} \\ &= \cos \theta C(s) + \sin \theta W(s) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

I ve II . temel form katsayıları aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$g_{11\delta} = \{\tau(s) + rf(s) \cos \theta\}^2 + r^2 g^2(s),$$

$$g_{12\delta} = r^2 g(s), g_{22\delta} = r^2,$$

$$L_{11\delta} = -f(s) \cos \theta \{\tau(s) + rf(s) \cos \theta\} - rg^2(s),$$

$$L_{12\delta} = -rg(s), L_{22\delta} = -r.$$

$\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan tüp yüzeyi $X_\delta(s, \theta)$ olsun. Bu yüze-ye ait karakterizasyonlar teğetler gösterge eğrisinde verilen ifadelerle benzer şekilde kolayca gösterilebilecektir.

Önerme 3.3.3 $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyi $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyi olsun. $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyi regülerdir ancak ve ancak $\tau(s) + rf(s) \cos \theta \neq 0$ eşitsizliği sağlanır (Ateş vd., 2018).

Sonuç 3.3.4 $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyi $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzeyinin Gauss, ortalama eğrilik fonksiyonları ve asli eğrilikleri sırasıyla şu şekilde verilir.

$$K_\delta = \frac{f(s)\cos\theta}{r(\tau(s) + rf(s)\cos\theta)}, \quad H_\delta = -\frac{1}{2}\left(rK_B + \frac{1}{r}\right),$$

ve

$$(k_1)_\delta = -\frac{1}{r}, \quad (k_2)_\delta = -\frac{f(s)\cos\theta}{(\tau(s) + rf(s)\cos\theta)}$$

şeklinde verilir (Ateş vd., 2018).

Teorem 3.3.5 $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyi $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzey olsun. $X_\delta(s, \theta)$ tüp yüzeyinin s ve θ parametre eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisi asimptotik bir eğridir ancak ve ancak

$$\sigma^2(s)f(s) = -\frac{1}{r}\cos\theta\{\tau(s) + rf(s)\cos\theta\} \quad |\tau(s)| \geq 2r|g(s)|$$

şartı gerçekleşir.

(ii) $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi asimptotik bir eğri olamaz (Ateş vd., 2018).

Teorem 3.3.6 $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyi $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan regüler bir tüp yüzey olsun. Yüzeyin s ve θ parametre eğrileri aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyinin s parametre eğrisi geodezik bir eğridir ancak ve ancak $r^2g^2 + (\tau + rf\cos\theta)^2$ ifadesi sabittir.

(ii) $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyinin θ parametre eğrisi her zaman geodezik bir eğridir (Ateş vd., 2018).

Teorem 3.3.7 $X_\delta(s, \theta)$ yüzeyi $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan tüp yüzeyinin minimal eğrileri aşağıdaki gibi verilir:

$$\delta_B(s) = \delta(\varphi_B(s)) + r(\cos\theta C(s) + \sin\theta W(s)).$$

Burada

$$\varphi_B(s) = \int \tau(s) ds \text{ ve } \theta = \arccos\left(-\frac{\tau(s)}{2rf(s)}\right), \quad \tau(s) \neq 0$$

şeklindedir (Ateş vd., 2018).

3.4. Küresel Gösterge Eğrileri Tarafından Oluşturulan Kanal ve Tüp Yüzey Örnekleri

Bu bölümde, $\alpha(s)$ eğrisinin küresel göstergeleriyle oluşturulan bazı kanal, genelleştirilmiş tüp ve tüp yüzeylerine örnekler verilecektir.

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{40} \sin 8s - \frac{2}{5} \sin 2s, -\frac{1}{40} \cos 8s + \frac{2}{5} \cos 2s, \frac{4}{15} \sin 3s \right)$$

eğrisinin alternatif hareketli çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$

$$N(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos 5s, -\frac{4}{5} \sin 5s, -\frac{3}{5} \right),$$

$$C(s) = (\sin 5s, -\cos 5s, 0),$$

$$W(s) = \left(-\frac{3}{5} \cos 5s, -\frac{3}{5} \sin 5s, \frac{4}{5} \right),$$

$$\kappa(s) = 4 \sin 3s, \tau(s) = 4 \cos 3s, f(s) = 4 \text{ ve } g(s) = -3$$

Daha sonra $\alpha(s)$ eğrisinin teğetler, normaller ve binormaller gösterge eğrileri

$$\beta(\varphi_T(s)) = \left(\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s, \frac{1}{5} \sin 8s - \frac{4}{5} \sin 2s, \frac{4}{5} \cos 3s \right),$$

$$\gamma(\varphi_N(s)) = \left(-\frac{4}{5} \cos 5s, -\frac{4}{5} \sin 5s, -\frac{3}{5} \right),$$

$$\delta(\varphi_B(s)) = \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s, -\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s, \frac{4}{5} \sin 3s \right)$$

şeklinde parametrelendirilir.

$q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyonunun M_N matris gösterimi

$$M_N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$n_{11} = \cos^2 \theta - \frac{9}{25} \sin^2 \theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \cos 10s, \quad n_{12} = \frac{3}{5} \sin 2\theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \sin 10s,$$

$$n_{13} = -\frac{4}{5} \sin 2\theta \sin 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \cos 5s, \quad n_{21} = -\frac{3}{5} \sin 2\theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \sin 10s,$$

$$n_{22} = \cos^2 \theta - \frac{9}{25} \sin^2 \theta - \frac{16}{25} \sin^2 \theta \cos 10s, \quad n_{23} = \frac{4}{5} \sin 2\theta \cos 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \sin 5s,$$

$$n_{31} = \frac{4}{5} \sin 2\theta \sin 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \cos 5s, \quad n_{32} = -\frac{4}{5} \sin 2\theta \cos 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \sin 5s,$$

$$n_{33} = \cos^2 \theta + \frac{9}{25} \sin^2 \theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \cos 10s$$

şeklinde. Ayrıca benzer şekilde

$q_C(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta C(s)$ birim reel kuaterniyonunun M_C matris gösterimi

$$M_C = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta \cos 10s & -\sin^2\theta \sin 10s & -\sin 2\theta \cos 5s \\ -\sin^2\theta \sin 10s & \cos^2\theta + \sin^2\theta \cos 10s & -\sin 2\theta \sin 5s \\ \sin 2\theta \cos 5s & \sin 2\theta \sin 5s & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Örnek 3.4.1 $r(s) = \sin s$ olarak alınırsa $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan kanal yüzeyin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \sin s \cos s N(s) + \sin s q_N(s, \theta) \times C(s)$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \sin s \cos s N(s) + \sin s M_N C(s)$$

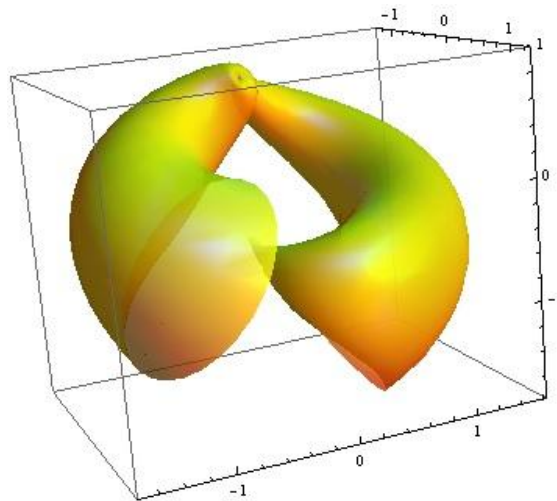
olarak verilir. M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$X_\beta(s, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s + \frac{2}{5} \sin 2s \cos 5s + \sin s \cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \sin s \sin \theta \cos 5s, \\ \frac{1}{5} \sin 8s - \frac{4}{5} \sin 2s + \frac{2}{5} \sin 2s \sin 5s - \sin s \cos \theta \cos 5s - \frac{3}{5} \sin s \sin \theta \sin 5s, \\ \frac{4}{5} \cos 3s + \frac{3}{10} \sin 2s + \frac{4}{5} \sin s \sin \theta \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\beta(s, \theta)$ kanal yüzeyinin grafiği Şekil 3.4.1 de verilmiştir.



Şekil 3.4.1 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Kanal Yüzeyi

Örnek 3.4.2 $r(s) = 1$ ve $r(\theta) = \theta$ olarak alınırsa $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\beta(s, \theta)$ tüp ve $G_\beta(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemleri,

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + q_N(s, \theta) \times C(s),$$

$$G_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \theta q_N(s, \theta) \times C(s)$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemleri,

$$X_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + M_N C(s),$$

$$G_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \theta M_N C(s)$$

olarak verilir. M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

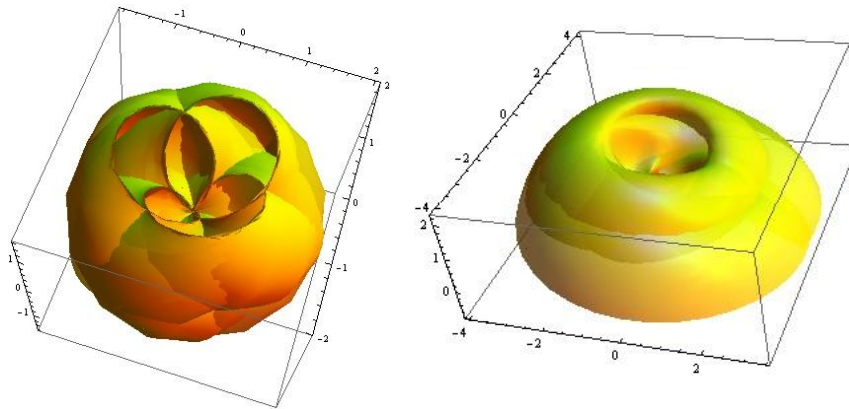
(iii) yüzeyin parametrik denklemleri;

$$X_\beta(s, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s + \cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \sin \theta \cos 5s, \\ \frac{1}{5} \sin 8s - \frac{4}{5} \sin 2s - \cos \theta \cos 5s - \frac{3}{5} \sin \theta \sin 5s, \\ \frac{4}{5} \cos 3s + \frac{4}{5} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$G_\beta(s, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s + \theta \cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \theta \sin \theta \cos 5s, \\ \frac{1}{5} \sin 8s - \frac{4}{5} \sin 2s - \theta \cos \theta \cos 5s - \frac{3}{5} \theta \sin \theta \sin 5s, \\ \frac{4}{5} \cos 3s + \frac{4}{5} \theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\beta(s, \theta)$ tüp ve $G_\beta(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin grafikleri Şekil 3.4.2 de verilmiştir.



Şekil 3.4.2 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp ve Genelleştirilmiş Tüp Yüzeyleri

Örnek 3.4.3 $r(s) = \text{sins}$ olarak alınırsa $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan kanal yüzeyin;

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \text{sinscoss}C(s) + \text{sins}q_C(s, \theta) \times W(s)$$

şeklinde ifade edilir. $q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \text{sinscoss}C(s) + \text{sins}M_C W(s)$$

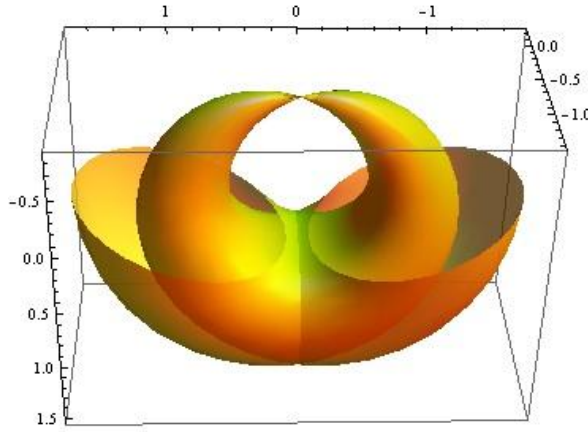
olarak verilir. M_C matrisi $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned} X_\gamma(s, \theta) = & \left(-\frac{4}{5}\cos 5s - \frac{1}{2}\sin 2s\sin 5s - \frac{3}{5}\text{sinscos}\theta\cos 5s - \frac{4}{5}\text{sinssin}\theta\cos 5s, \right. \\ & -\frac{4}{5}\sin 5s + \frac{1}{2}\sin 2s\cos 5s - \frac{3}{5}\text{sinscos}\theta\sin 5s - \frac{4}{5}\text{sinssin}\theta\sin 5s, \\ & \left. -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{sinscos}\theta - \frac{3}{5}\text{sinssin}\theta \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\gamma(s, \theta)$ kanal yüzeyinin grafiği Şekil 3.4.3 de verilmiştir.



Şekil 3.4.3 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Kanal Yüzeyi

Örnek 3.4.4 $r(s) = 1$ ve $r(\theta) = \theta$ olarak alınırsa $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından $X_\gamma(s, \theta)$ tüp ve $G_\gamma(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin,

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemleri,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + q_C(s, \theta) \times W(s),$$

$$G_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \theta q_C(s, \theta) \times W(s)$$

şeklinde ifade edilir. $q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemleri,

$$X_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + M_C W(s),$$

$$G_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \theta M_C W(s)$$

olarak verilir. M_C matrisi $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

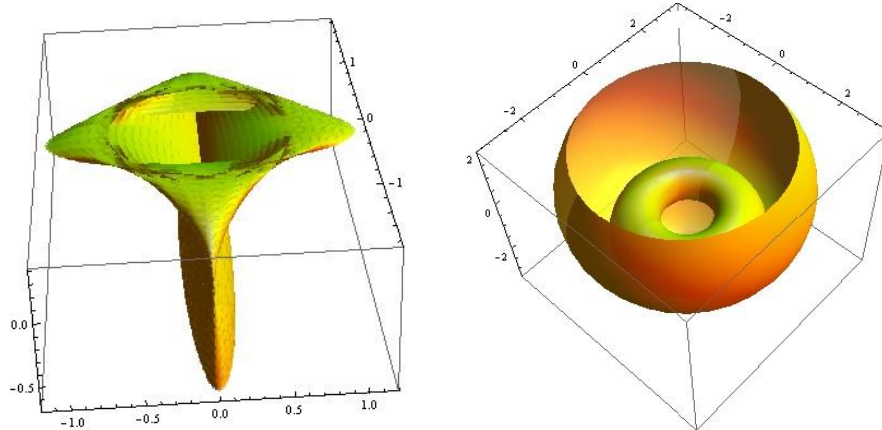
(iii) yüzeyin parametrik denklemleri,

$$X_\gamma(s, \theta) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\cos 5s - \frac{3}{5}\cos 5s \cos\theta - \frac{4}{5}\cos 5s \sin\theta, \\ -\frac{4}{5}\sin 5s - \frac{3}{5}\sin 5s \cos\theta - \frac{4}{5}\sin 5s \sin\theta, \\ -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos\theta - \frac{3}{5}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$G_\gamma(s, \theta) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\cos 5s - \frac{3}{5}\theta \cos 5s \cos\theta - \frac{4}{5}\theta \cos 5s \sin\theta, \\ -\frac{4}{5}\sin 5s - \frac{3}{5}\theta \sin 5s \cos\theta - \frac{4}{5}\theta \sin 5s \sin\theta, \\ -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\theta \cos\theta - \frac{3}{5}\theta \sin\theta \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\gamma(s, \theta)$ tüp ve $G_\gamma(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin grafikleri Şekil 3.4.4 de verilmiştir.



Şekil 3.4.4 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp ve Genelleştirilmiş Tüp Yüzeyleri

Örnek 3.4.5 $r(s) = \sin s$ olarak alınırsa $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan kanal yüzeyin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) - \sin s \cos s N(s) + \sin s q_N(s, \theta) \times C(s)$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) - \sin s \cos s N(s) + \sin s M_N C(s)$$

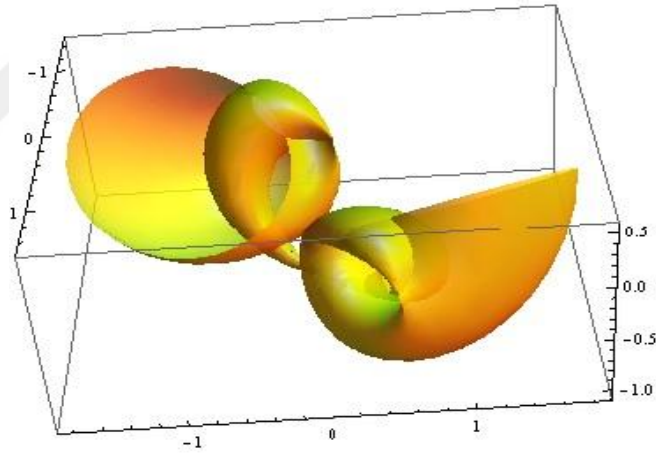
olarak verilir. M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$X_\delta(s, \theta) = \begin{aligned} & \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s + \frac{2}{5} \sin 2s \cos 5s + \sin s \cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \sin s \sin \theta \cos 5s, \right. \\ & -\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s + \frac{2}{5} \sin 2s \sin 5s - \sin s \cos \theta \cos 5s - \frac{3}{5} \sin s \sin \theta \sin 5s, \\ & \left. \frac{4}{5} \sin 3s + \frac{3}{10} \sin 2s + \frac{4}{5} \sin s \sin \theta \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\delta(s, \theta)$ kanal yüzeyinin grafiği Şekil 3.4.5 de verilmiştir.



Şekil 3.4.5 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Kanal Yüzeyi

Örnek 3.4.6 $r(s) = 1$ ve $r(\theta) = \theta$ olarak alınırsa $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\delta(s, \theta)$ tüp ve $G_\delta(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemleri,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + q_N(s, \theta) \times C(s),$$

$$G_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \theta q_N(s, \theta) \times C(s)$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemleri,

$$X_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + M_N C(s),$$

$$G_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \theta M_N C(s)$$

olarak verilir. M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

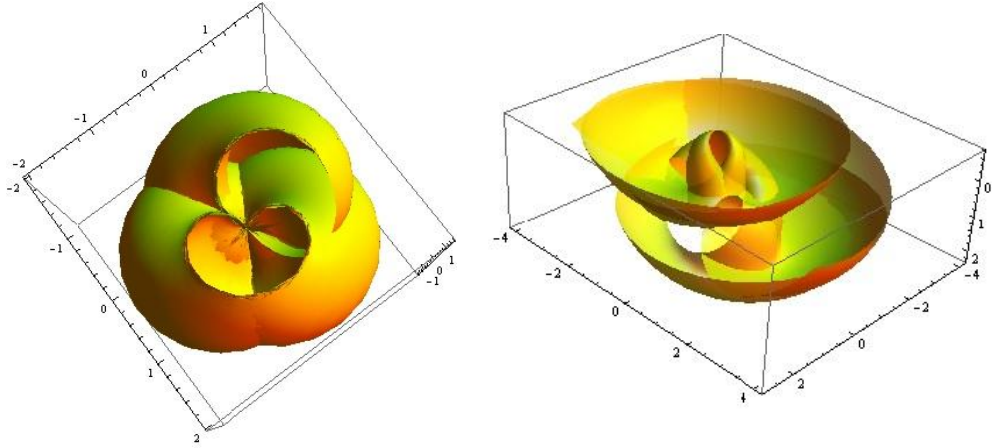
(iii) yüzeyin parametrik denklemleri,

$$X_\delta(s, \theta) = \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s + \cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \sin \theta \cos 5s, \right. \\ \left. -\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s - \cos \theta \cos 5s - \frac{3}{5} \sin \theta \sin 5s, \right. \\ \left. \frac{4}{5} \sin 3s + \frac{4}{5} \sin \theta \right)$$

$$G_\delta(s, \theta) = \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s + \theta \cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \theta \sin \theta \cos 5s, \right. \\ \left. -\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s - \theta \cos \theta \cos 5s - \frac{3}{5} \theta \sin \theta \sin 5s, \right. \\ \left. \frac{4}{5} \sin 3s + \frac{4}{5} \theta \sin \theta \right)$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $X_\delta(s, \theta)$ tüp ve $G_\delta(s, \theta)$ genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin grafikleri Şekil 3.4.6 da verilmiştir.



Şekil 3.4.6 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp ve Genelleştirilmiş Tüp Yüzeyler

4. DOLGU VE DOLGU BENZERİ YÜZEYLER

Tanım 4.1 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir uzay eğrisi olsun.

$\Lambda: X = \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ olmak üzere $m > 0$ ve $\|m\alpha'_3\| < \sqrt{(\alpha'_1)^2 + (\alpha'_2)^2}$ olsun. O zaman bir parametrelili koni ailesinin zarfı

$$f(X; s) := (x - \alpha_1(s))^2 + (y - \alpha_2(s))^2 - m^2(z - \alpha_3(s))^2 = 0$$

dolgu yüzeyi olarak adlandırılır, Λ yüzeyin doğrultmanıdır (Hartman, 2003).

Teorem 4.2 Öklid uzayında $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve Frenet elemanları $\{T(s), N(s), B(s), \kappa(s), \tau(s)\}$ olsun. Dolgu yüzeyinin denklemi

$$D_\alpha(s, \theta) = \alpha(s) + \xi(s)T(s) \pm \eta(s)\{\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s)\}$$

şeklindedir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm\sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = D_{\alpha_3}(s, \theta) - \alpha_3(s)$ şeklindedir (Kazan ve Karadağ, 2019).

Koninin zarf ailesi olarak oluşturulan dolgu yüzeyi $D_\alpha(s, \theta)$ yüzeyinin parametrelemesi

$$D_\alpha(s, \theta) = (D_{\alpha_1}(s, \theta), D_{\alpha_2}(s, \theta), D_{\alpha_3}(s, \theta))$$

olsun. Eğer $\delta_3(s, \theta) = D_{\alpha_3}(s, \theta) - \alpha_3(s)$ ifadesinde $D_{\alpha_3}(s, \theta) = \Omega(s, \theta)$ şeklinde keyfi bir fonksiyon olarak alınırsa elde edilen yüzey dolgu benzeri yüzey olarak adlandırılır. Eğer $\delta_3(s, \theta)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon olarak alınırsa da yüzey tüp dolgu benzeri yüzey olarak adlandırılır.

Bu bölümde ilk olarak, $\alpha(s)$ birim hızlı regüler eğrisinin küresel gösterge eğrileri tarafından oluşturulan dolgu, dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeyler tanımlanacaktır. Bu yüzeylerin alternatif hareketli çatının elemanları yardımıyla parametrik denklemleri verilecektir. Sonrasında, bu yüzeylerin denklemleri birim kuaterniyonlar kullanılarak daha basit halde verilecektir. Ayrıca birim kuaterniyona karşılık gelen matrisler ile homotetik hareketler cinsinden ifade edilecektir. Son olarak, verilen teori örnekler ile desteklenecek ve gösterge eğrileri tarafından üretilen yüzeylerin grafikleri verilecektir.

4.1. Teğetler Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Dolgu ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzeyler

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin teğetler gösterge eğrisi

$$\beta(s_T) = \beta(\varphi_T(s)) = T(s)$$

olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu bölümde, $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu, dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeylerin denklemleri verilecektir. Ardından bu yüzey denklemlerinin her biri birim kuaterniyonlar ve homotetik hareketler olarak matrisler yardımıyla ifade edilecektir.

Koninin zarf ailesi olarak oluşturulan dolgu yüzeyi $D_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin parametrelemesi

$$D_\beta(s, \theta) = (D_{\beta_1}(s, \theta), D_{\beta_2}(s, \theta), D_{\beta_3}(s, \theta))$$

olsun. Ayrıca birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı teğetler gösterge eğrisi

$$\beta(\varphi_T(s)) = (\beta_1(\varphi_T(s)), \beta_2(\varphi_T(s)), \beta_3(\varphi_T(s)))$$

olsun. $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi $D_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin merkez eğrisi olmak üzere

$m > 0$ ve $\|m\beta'_3\| < \sqrt{(\beta'_1)^2 + (\beta'_2)^2}$ olduğunu kabul edelim. O zaman teğetler gösterge eğrisi $\beta(\varphi_T(s))$ tarafından oluşturulan dolgu yüzeyi

$$(D_{\beta_1}(s, \theta) - \beta_1(\varphi_T(s)))^2 + (D_{\beta_2}(s, \theta) - \beta_2(\varphi_T(s)))^2 - m^2 (D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)))^2 = 0 \quad (4.1.1)$$

olarak alınabilir. Düzenlemelerin daha kolay yapılabilmesi için terim ekleyip çıkartılarak

$$(D_{\beta_1}(s, \theta) - \beta_1(\varphi_T(s)))^2 + (D_{\beta_2}(s, \theta) - \beta_2(\varphi_T(s)))^2 - m^2 (D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)))^2 + (D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)))^2 - (D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)))^2 = 0 \quad (4.1.2)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.2) eşitliğinden

$$\langle D_\beta(s, \theta) - \beta(\varphi_T(s)), D_\beta(s, \theta) - \beta(\varphi_T(s)) \rangle = (m^2 + 1) (D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)))^2 \quad (4.1.3)$$

elde edilir. Ardından, $D_\beta(s, \theta)$ yüzeyinin alternatif hareketli çatı $\{N, C, W\}$ olsun. Buna göre parametrik denklemi

$$D_\beta(s, \theta) - \beta(\varphi_T(s)) = \lambda_1(s, \theta) N(s) + \lambda_2(s, \theta) C(s) + \lambda_3(s, \theta) W(s) \quad (4.1.4)$$

olarak yazılabilir. λ_1, λ_2 ve λ_3 fonksiyonları s ve θ parametrelerinin diferansiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Dahası, ortonormal çatı özellikleri ve (4.1.4) eşitliği yardımıyla

$$\langle D_\beta(s, \theta) - \beta(\varphi_T(s)), D_\beta(s, \theta) - \beta(\varphi_T(s)) \rangle = \lambda_1^2(s, \theta) + \lambda_2^2(s, \theta) + \lambda_3^2(s, \theta) \quad (4.1.5)$$

elde edilir. (4.1.3) ve (4.1.5) eşitlikleri yardımıyla

$$\lambda_1^2(s, \theta) + \lambda_2^2(s, \theta) + \lambda_3^2(s, \theta) = (m^2 + 1) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right)^2 \quad (4.1.6)$$

bulunur. Eğer (4.1.6) ifadesinin s ve θ parametrelerine göre türevi alınırsa sırasıyla

$$\begin{aligned} & \lambda_1(s, \theta)\lambda_{1s}(s, \theta) + \lambda_2(s, \theta)\lambda_{2s}(s, \theta) + \lambda_3(s, \theta)\lambda_{3s}(s, \theta) \\ &= (m^2 + 1) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right)_s \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

ve

$$\begin{aligned} & \lambda_1(s, \theta)\lambda_{1\theta}(s, \theta) + \lambda_2(s, \theta)\lambda_{2\theta}(s, \theta) + \lambda_3(s, \theta)\lambda_{3\theta}(s, \theta) \\ &= (m^2 + 1) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) \right)_\theta \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (4.1.4) eşitliğinin s ve θ parametrelerine göre türevleri alınırsa sırasıyla

$$\begin{aligned} \left(D_{\beta}(s, \theta) \right)_s &= (1 + \lambda_{1s}(s, \theta) - \lambda_{2s}(s, \theta)f(s)) N(s) \\ &+ (\lambda_{1s}(s, \theta)f(s) + \lambda_{2s}(s, \theta) - \lambda_{3s}(s, \theta)g(s)) C(s) \\ &+ (\lambda_{2s}(s, \theta)g(s) + \lambda_{3s}(s, \theta)) W(s) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

ve

$$\left(D_{\beta_3}(s, \theta) \right)_\theta = (\lambda_{1\theta}(s, \theta)) N(s) + (\lambda_{2\theta}(s, \theta)) C(s) + (\lambda_{3\theta}(s, \theta)) W(s) \quad (4.1.10)$$

olarak hesaplanır. Zarf ailesinin tanımı kullanılarak

$$\langle D_{\beta}(s, \theta) - \beta(\varphi_T(s)), \left(D_{\beta}(s, \theta) \right)_s \rangle = 0 \quad (4.1.11)$$

olarak düşünülür. (4.1.4), (4.1.9) ve (4.1.11) eşitlikleri yardımıyla

$$\lambda_1(s, \theta) + \lambda_1(s, \theta)\lambda_{1s}(s, \theta) + \lambda_2(s, \theta)\lambda_{2s}(s, \theta) + \lambda_3(s, \theta)\lambda_{3s}(s, \theta) = 0 \quad (4.1.12)$$

elde edilir. (4.1.7) ve (4.1.12) eşitlikleri kullanılarak

$$\lambda_1(s, \theta) = -(m^2 + 1) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right)_s$$

olarak bulunur. Trigonometrik özellikler yardımıyla

$$\begin{aligned} \lambda_2(s, \theta) &= \pm \sqrt{m^2 + 1} \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right) \sqrt{1 - (m^2 + 1) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right)_s^2} \cos \theta \\ \lambda_3(s, \theta) &= \pm \sqrt{m^2 + 1} \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right) \sqrt{1 - (m^2 + 1) \left(D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s)) \right)_s^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

olarak alınabilir.

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin teğetler gösterge eğrisi

$\beta(\varphi_T(s))$ olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin birim normal vektörü $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ olmak üzere

$$q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$$

birim reel kuaterniyonu $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uzayında bir fonksiyondur. $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonunun M_N matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) & -\sin\theta(\cos\theta n_3 - \sin\theta n_1 n_2) & 2\sin\theta(\cos\theta n_2 + \sin\theta n_1 n_3) \\ 2\sin\theta(\cos\theta n_3 + \sin\theta n_1 n_2) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_2^2 - n_1^2 - n_3^2) & 2\sin\theta(\sin\theta n_2 n_3 - \cos\theta n_1) \\ 2\sin\theta(\sin\theta n_1 n_3 - \cos\theta n_2) & 2\sin\theta(\cos\theta n_1 + \sin\theta n_2 n_3) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(n_3^2 - n_2^2 - n_1^2) \end{bmatrix} \quad (4.1.14)$$

olarak verilir. $N(s)$, M_N matrisinin dönme eksenidir ve $M_N N(s) = N(s)$ şeklindedir.

Şimdi tüm bunların ışığı altında regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu yüzeyleri ile ilgili temel teoremimizi verebiliriz.

Teorem 4.1.1 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $D_\beta(s, \theta)$ dolgu yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$D_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.1.15)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$D_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s)(s) \quad (4.1.16)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm\sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = D_{\beta_3}(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s))$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

İspat: $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonu ile $C(s)$ has reel kuaterniyonunun çarpımından

$$q_N(s, \theta) \times C(s) = \cos\theta C(s) + \sin\theta W(s)$$

olarak hesaplanır. Ardından,

$$D_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)\{\cos\theta C(s) + \sin\theta W(s)\} \quad (4.1.17)$$

elde edilir.

Eğer burada $\beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s)$ öteleme vektörü, $\eta(s)$ homotetik skalar ve M_N ortogonal matrisi de homotetik hareketin matrisi olarak düşünülür ise

$$D_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s)$$

ifadesi bir homotetik harekettir. Bu şekilde teorem ispatı tamamlanır.

Şimdi, regüler birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrisinin teğetler göstergesi olan $\beta(\varphi_T(s))$ tarafından oluşturulan dolgu benzeri ile tüp dolgu benzeri yüzeylerin kuaterniyonlar ve matrisler yardımıyla parametrizasyonları verilecektir.

Teorem 4.1.2 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DB_\beta(s, \theta)$ dolgu benzeri yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$DB_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.1.18)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$DB_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s) \quad (4.1.19)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm \sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = \Omega(s, \theta) - \beta_3(\varphi_T(s))$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

Teorem 4.1.3 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DBT_\beta(s, \theta)$ tüp dolgu benzeri yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$DBT_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.1.20)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$DBT_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) \pm \eta(s)M_N C(s) \quad (4.1.21)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm \sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = c \in \mathbb{R}$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

4.2. Normaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Dolgu ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzeyler

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin normaller gösterge eğrisi

$$\gamma(s_N) = \gamma(\varphi_N(s)) = N(s)$$

olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu bölümde, $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu, dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeylerin

denklemleri verilecektir. Ardından bu yüzey denklemlerinin herbiri birim kuaterniyonlar ve homotetik hareketler olarak matrisler yardımıyla ifade edilecektir.

$$C(s) = \frac{N'(s)}{\|N'(s)\|} = (c_1(s), c_2(s), c_3(s))$$

olmak üzere

$$q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$$

birim reel kuaterniyonu $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ uzayında bir fonksiyondur. $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonunun M_C matris gösterimi

$$M_C = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta(c_1^2 - c_2^2 - c_3^2) & -2\sin\theta(\cos\theta c_3 - \sin\theta c_1 c_2) & 2\sin\theta(\cos\theta c_2 + \sin\theta c_1 c_3) \\ 2\sin\theta(\cos\theta c_3 + \sin\theta c_1 c_2) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(c_2^2 - c_1^2 - c_3^2) & 2\sin\theta(\sin\theta c_2 c_3 - \cos\theta c_1) \\ 2\sin\theta(\sin\theta c_1 c_3 - \cos\theta c_2) & 2\sin\theta(\cos\theta c_1 + \sin\theta c_2 c_3) & \cos^2\theta + \sin^2\theta(c_3^2 - c_2^2 - c_1^2) \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

olarak verilir. $C(s)$, M_C matrisinin dönme eksenidir ve $M_C C(s) = C(s)$ şeklindedir.

Şimdi, regüler $\alpha(s)$ eğrisinin normaller göstergesi $\gamma(\varphi_N(s))$ eğrisi tarafından oluşturulan dolgu yüzeyleri ile ilgili temel teoremimizi verebiliriz.

Teorem 4.2.1 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $D_\gamma(s, \theta)$ dolgu yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$D_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s) \pm \eta(s)q_C(s, \theta) \times W(s) \quad (4.2.2)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$D_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s) \pm \eta(s)M_C W(s) \quad (4.2.3)$$

olarak verilir.

$$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta), \eta(s) = \pm\sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$$

ve $\delta_3(s, \theta) = D_{\gamma_3}(s, \theta) - \gamma_3(\varphi_N(s))$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

İspat: $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonu ile $W(s)$ has reel kuaterniyonunun çarpımından

$$q_C(s, \theta) \times W(s) = \cos\theta W(s) + \sin\theta N(s)$$

olarak hesaplanır.

$$D_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s) \pm \eta(s)\{\cos\theta W(s) + \sin\theta N(s)\} \quad (4.2.4)$$

elde edilir. Eğer burada $\gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s)$ öteleme vektörü, $\eta(s)$ homotetik skalar ve M_C ortogonal matrisi de homotetik hareketin matrisi olarak düşünülür ise

$$D_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s) \pm \eta(s)M_C W(s)$$

ifadesi bir homotetik harekettir. Bu şekilde teorem ispatı tamamlanır.

Şimdi, regüler birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrinin $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu benzeri ile tüp dolgu benzeri yüzeylerin kuaterniyonlar ve matrisler yardımıyla parametrizasyonları verilecektir.

Teorem 4.2.2 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından üretilen $DB_\gamma(s, \theta)$ dolgu benzeri yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$DB_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s) \pm \eta(s)q_C(s, \theta) \times W(s) \quad (4.2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$DB_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \xi(s)C(s) \pm \eta(s)M_C W(s) \quad (4.2.6)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm \sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = \Omega(s, \theta) - \gamma_3(\varphi_N(s))$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

Teorem 4.2.3 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DBT_\gamma(s, \theta)$ tüp dolgu benzeri yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) reel kuaterniyon çarpımı $q_C(s, \theta) \times W(s)$ yardımıyla,

$$DBT_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) \pm \eta(s)q_C(s, \theta) \times W(s) \quad (4.2.7)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$DBT_\gamma(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) \pm \eta(s)M_C W(s) \quad (4.2.8)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm \sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = c \in \mathbb{R}$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

4.3. Binormaller Gösterge Eğrisi Tarafından Oluşturulan Dolgu ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzeyler

$\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir eğri ve hareketli alternatif çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin binormaller gösterge eğrisi

$$\delta(s_B) = \delta(\varphi_B(s)) = B(s)$$

olmak üzere birim hızlı regüler bir eğri olsun. Bu bölümde, $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu, dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeylerin denklemleri verilecektir. Ardından bu yüzey denklemlerinin her biri birim kuaterniyonlar ve homotetik hareketler olarak matrisler yardımıyla ifade edilecektir.

Şimdi bunlar yardımıyla regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu yüzeyleri ile ilgili temel teoreminizi verebiliriz. Bu teoremden oluşturulan dolgu yüzeyi, bölüm 4.1 de verilen teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu yüzeyine çok benzer şekilde üretildiğinden dolayı teoremin ispatı Teorem 4.1.1 ifadesine benzer şekilde kolayca yapılabilir. Bu yüzden aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.3.1 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $D_\delta(s, \theta)$ dolgu yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$D_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.3.1)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$D_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s) \quad (4.3.2)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm \sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$ ve $\delta_3(s, \theta) = D_{\delta_3}(s, \theta) - \delta_3(\varphi_B(s))$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

Şimdi, regüler birim hızlı bir $\alpha(s)$ eğrinin binormaller göstergesi olan $\delta(s_B)$ tarafından oluşturulan dolgu benzeri ile tüp dolgu benzeri yüzeylerin kuaterniyonlar ve matrisler yardımıyla parametrizasyonları verilecektir.

Teorem 4.3.2 $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisi verilsin. $\alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DB_\delta(s, \theta)$ dolgu benzeri yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$DB_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.3.3)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$DB_{\delta}(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \xi(s)N(s) \pm \eta(s)M_N C(s) \quad (4.3.4)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm\sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$
ve $\delta_3(s, \theta) = \Omega(s, \theta) - \delta_3(\varphi_B(s))$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

Teorem 4.3.3 $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DBT_{\delta}(s, \theta)$ tüp dolgu benzeri yüzeyinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir.

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla,

$$DBT_{\delta}(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) \pm \eta(s)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.3.5)$$

şeklinde ifade edilir.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla,

$$DBT_{\delta}(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) \pm \eta(s)M_N C(s) \quad (4.3.6)$$

olarak verilir.

$\xi(s) = -(m^2 + 1)\delta_3(s, \theta) \delta_{3s}(s, \theta)$, $\eta(s) = \pm\sqrt{m^2 + 1}\delta_3(s, \theta)\sqrt{1 - (m^2 + 1)\delta_{3s}^2(s, \theta)}$
ve $\delta_3(s, \theta) = c \in \mathbb{R}$ şeklindedir (Kocakuşaklı, 2025).

4.4. Küresel Gösterge Eğrileri Tarafından Oluşturulan Dolgu Benzeri ve Tüp Dolgu Benzeri Yüzey Örnekleri

Bu bölümde, $\alpha(s): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler eğrisinin küresel gösterge eğrileri olan teğetler göstergesi, normaller göstergesi ve binormaller göstergesi eğrileri tarafından oluşturulan dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzey örnekleri verilecektir. Bu yüzeylerin önce parametrik denklemleri verilecek, sonrasında reel kuaterniyon çarpımı yardımıyla kuaterniyonik olarak ifade edilecektir. Ardından, kuaterniyonların matris karşılığı yardımı ile de homotetik hareketler cinsinden matrisel denklemleri verilecektir. Ayrıca son olarak, oluşturulan bu yüzeylerin Mathematica programı yardımı ile grafikleri verilecektir.

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{40} \sin 8s - \frac{2}{5} \sin 2s, -\frac{1}{40} \cos 8s + \frac{2}{5} \cos 2s, \frac{4}{15} \sin 3s \right)$$

alternatif hareketli çatı elemanları $\{N(s), C(s), W(s), f(s), g(s)\}$

$$N(s) = \left(-\frac{4}{5} \cos 5s, -\frac{4}{5} \sin 5s, -\frac{3}{5} \right),$$

$$C(s) = (\sin 5s, -\cos 5s, 0),$$

$$W(s) = \left(-\frac{3}{5} \cos 5s, -\frac{3}{5} \sin 5s, \frac{4}{5} \right)$$

dir. Daha sonra $\alpha(s)$ eğrisinin teğetler, normaller ve binormaller gösterge eğrileri

$$\beta(\varphi_T(s)) = \left(\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s, \frac{1}{5} \sin 8s - \frac{4}{5} \sin 2s, \frac{4}{5} \cos 3s \right),$$

$$\gamma(\varphi_N(s)) = \left(-\frac{4}{5} \cos 5s, -\frac{4}{5} \sin 5s, -\frac{3}{5} \right),$$

$$\delta(\varphi_B(s)) = \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s, -\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s, \frac{4}{5} \sin 3s \right)$$

şeklinde parametrelendirilir.

$q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyonunun M_N matris gösterimi

$$M_N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} n_{11} &= \cos^2 \theta - \frac{9}{25} \sin^2 \theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \cos 10s, & n_{12} &= \frac{3}{5} \sin 2\theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \sin 10s, \\ n_{13} &= -\frac{4}{5} \sin 2\theta \sin 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \cos 5s, & n_{21} &= -\frac{3}{5} \sin 2\theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \sin 10s, \\ n_{22} &= \cos^2 \theta - \frac{9}{25} \sin^2 \theta - \frac{16}{25} \sin^2 \theta \cos 10s, & n_{23} &= \frac{4}{5} \sin 2\theta \cos 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \sin 5s, \\ n_{31} &= \frac{4}{5} \sin 2\theta \sin 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \cos 5s, & n_{32} &= -\frac{4}{5} \sin 2\theta \cos 5s + \frac{24}{25} \sin^2 \theta \sin 5s, \\ n_{33} &= \cos^2 \theta + \frac{9}{25} \sin^2 \theta + \frac{16}{25} \sin^2 \theta \cos 10s \end{aligned}$$

şeklinde dir. Ayrıca benzer şekilde

$q_C(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta C(s)$ birim reel kuaterniyonunun M_C matris gösterimi

$$M_C = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos 10s & -\sin^2 \theta \sin 10s & -\sin 2\theta \cos 5s \\ -\sin^2 \theta \sin 10s & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos 10s & -\sin 2\theta \sin 5s \\ \sin 2\theta \cos 5s & \sin 2\theta \sin 5s & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

olarak hesaplanır.

Örnek 4.4.1 $\delta_3(s, \theta) = 1$ ve $m = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi

tarafından oluşturulan tüp dolgu benzeri yüzeyin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$DBT_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \frac{\sqrt{5}}{2} q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.4.3)$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$DBT_\beta(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) + \frac{\sqrt{5}}{2} M_N C(s) \quad (4.4.4)$$

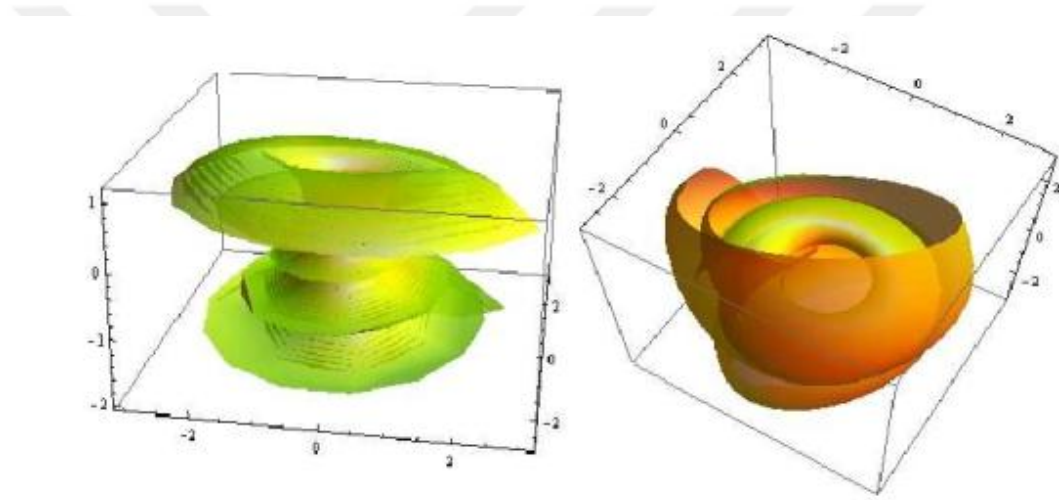
olarak verilir, burada (4.4.1) ile verilen M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$DBT_{\beta}(s, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\cos 8s - \frac{4}{5}\cos 2s + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\cos\theta\sin 5s - \frac{3}{5}\sin\theta\cos 5s\right), \\ \frac{1}{5}\sin 8s - \frac{4}{5}\sin 2s - \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\cos\theta\cos 5s + \frac{3}{5}\sin\theta\sin 5s\right), \\ \frac{4}{5}\cos 3s + \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta \end{pmatrix} \quad (4.4.5)$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DBT_{\beta}(s, \theta)$ tüp dolgu benzeri yüzeyinin farklı parametrelere göre grafikleri Şekil 4.4.1 de verilmiştir.



Şekil 4.4.1 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp Dolgu Benzeri Yüzey

Örnek 4.4.2 $\delta_3(s, \theta) = 1$ ve $m = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan tüp dolgu benzeri yüzeyin,

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$DBT_{\gamma}(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \frac{\sqrt{5}}{2} q_C(s, \theta) \times W(s) \quad (4.4.6)$$

şeklinde ifade edilir. $q_C(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta C(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$DBT_{\gamma}(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) + \frac{\sqrt{5}}{2} M_C W(s) \quad (4.4.7)$$

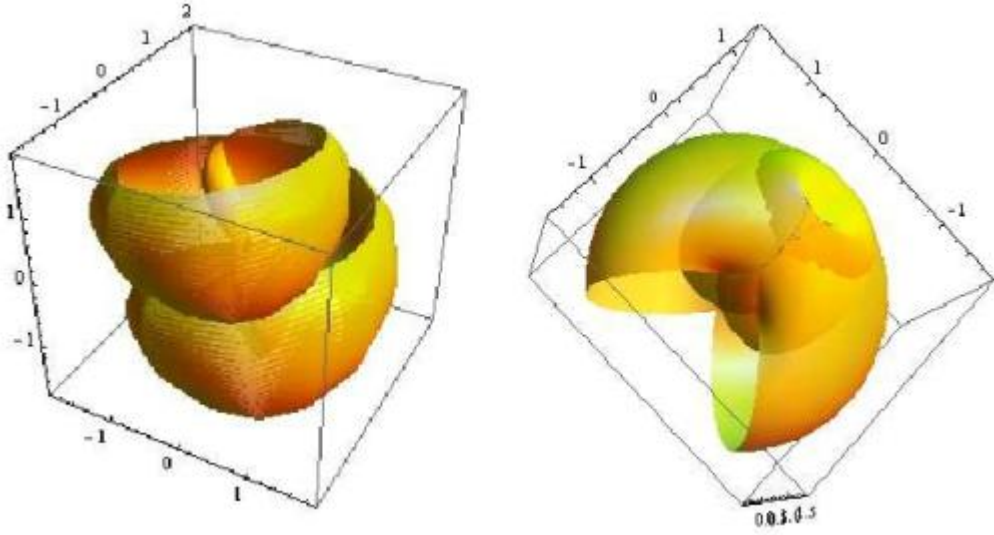
olarak verilir, burada (4.4.2) ile verilen M_C matrisi $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned}
DBT_{\gamma}(s, \theta) = & \left(-\frac{4}{5} \cos 5s - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{3}{5} \cos \theta \cos 5s + \frac{4}{5} \sin \theta \cos 5s \right), \right. \\
& -\frac{4}{5} \sin 5s - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{3}{5} \cos \theta \sin 5s + \frac{4}{5} \sin \theta \sin 5s \right), \\
& \left. -\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4}{5} \cos \theta - \frac{3}{5} \sin \theta \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DBT_{\gamma}(s, \theta)$ tüp dolgu benzeri yüzeyinin farklı parametrelere göre grafikleri Şekil 4.4.2 de verilmiştir.



Şekil 4.4.2 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp Dolgu Benzeri Yüzey

Örnek 4.4.3 $\delta_3(s, \theta) = 1$ ve $m = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan tüp dolgu benzeri yüzeyin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$DBT_{\delta}(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \frac{\sqrt{5}}{2} q_N(s, \theta) \times C(s) \tag{4.4.9}$$

şeklinde ifade edilir, burada $q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$DBT_{\delta}(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) + \frac{\sqrt{5}}{2} M_N C(s) \tag{4.4.10}$$

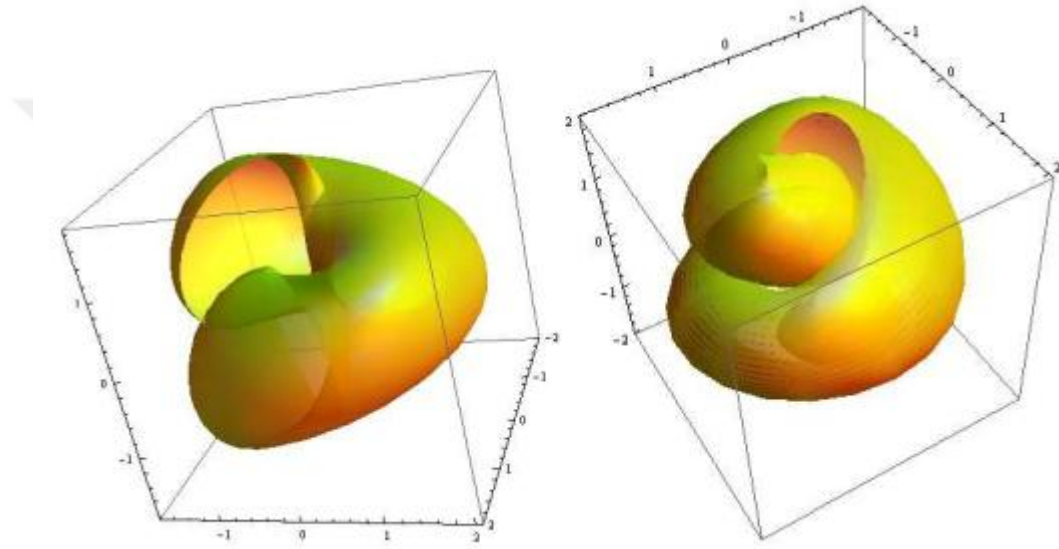
olarak verilir. (4.4.1) ile verilen M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned}
DBT_{\delta}(s, \theta) = & \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{3}{5} \cos \theta \cos 5s + \frac{4}{5} \sin \theta \cos 5s \right), \right. \\
& -\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s - \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{3}{5} \cos \theta \sin 5s + \frac{4}{5} \sin \theta \sin 5s \right), \\
& \left. \frac{4}{5} \sin 3s + \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{4}{5} \cos \theta - \frac{3}{5} \sin \theta \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DBT_{\delta}(s, \theta)$ tüp dolgu benzeri yüzeyinin farklı parametrelere göre grafikleri Şekil 4.4.3 de verilmiştir.



Şekil 4.4.3 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Tüp Dolgu Benzeri Yüzey

Örnek 4.4.4 $\delta_3(s, \theta) = \theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s$ ve $m = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu benzeri yüzeyin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi;

$$DB_{\beta}(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \frac{\sqrt{15}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s \right) N(s) + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s \right) q_N(s, \theta) \times C(s) \tag{4.4.12}$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$DB_{\beta}(s, \theta) = \beta(\varphi_T(s)) - \frac{\sqrt{15}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s \right) N(s) + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s \right) M_N C(s) \tag{4.4.13}$$

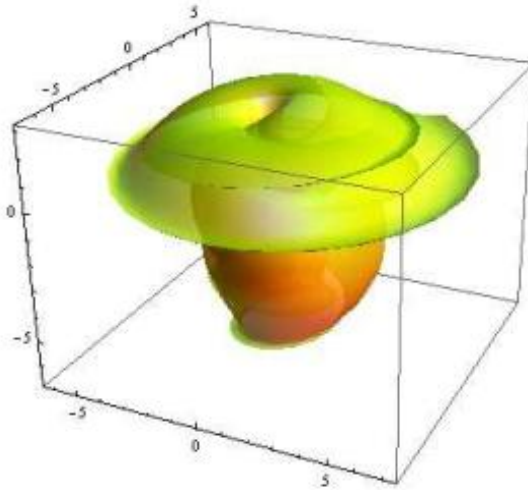
olarak verilir. (4.4.1) ile verilen M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned}
DB_{\beta}(s, \theta) = & \left(\frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s + \frac{\sqrt{15}}{5} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \cos 5s \right. \\
& + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \left(\cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \sin \theta \cos 5s \right), \\
& \frac{1}{5} \sin 8s - \frac{4}{5} \sin 2s + \frac{\sqrt{15}}{5} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \sin 5s \\
& - \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \left(\cos \theta \cos 5s + \frac{3}{5} \sin \theta \sin 5s \right), \\
& \left. \frac{4}{5} \cos 3s + \frac{3\sqrt{15}}{20} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \sin \theta \right) \quad (4.4.14)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\beta(\varphi_T(s))$ teğetler gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DB_{\beta}(s, \theta)$ dolgu benzeri yüzeyinin grafiği Şekil 4.4.4 de verilmiştir.



Şekil 4.4.4 Teğetler Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Dolgu Benzeri Yüzey

Örnek 4.4.5 $\delta_3(s, \theta) = \theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s$ ve $m = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu benzeri yüzeyin;

(i) $q_C(s, \theta) \times W(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$DB_{\gamma}(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \frac{\sqrt{15}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) C(s) + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) q_C(s, \theta) \times W(s) \quad (4.4.15)$$

şeklinde ifade edilir. $q_C(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta C(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$DB_{\gamma}(s, \theta) = \gamma(\varphi_N(s)) - \frac{\sqrt{15}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) C(s) + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) M_C W(s) \quad (4.4.16)$$

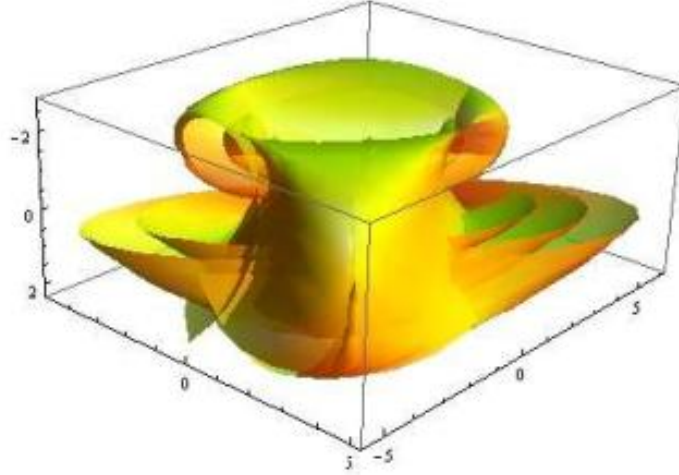
olarak verilir, burada (4.4.2) ile verilen M_C matrisi $q_C(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned}
 DB_\gamma(s, \theta) = & \left(-\frac{4}{5}\cos 5s - \frac{\sqrt{15}}{4}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)\sin 5s\right. \\
 & - \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)\left(\frac{3}{5}\cos\theta\cos 5s + \frac{4}{5}\sin\theta\cos 5s\right), \\
 & - \frac{4}{5}\sin 5s - \frac{\sqrt{15}}{5}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)\cos 5s \\
 & - \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)\left(\frac{3}{5}\cos\theta\sin 5s + \frac{4}{5}\sin\theta\sin 5s\right), \\
 & \left.- \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)\left(\frac{4}{5}\cos\theta - \frac{3}{5}\sin\theta\right)\right) \quad (4.4.17)
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\gamma(\varphi_N(s))$ normaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DB_\gamma(s, \theta)$ dolgu benzeri yüzeyinin grafiği Şekil 4.4.5 de verilmiştir.



Şekil 4.4.5 Normaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Dolgu Benzeri Yüzey

Örnek 4.4.6 $\delta_3(s, \theta) = \theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s$ ve $m = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan dolgu benzeri yüzeyin,

(i) $q_N(s, \theta) \times C(s)$ kuaterniyon çarpımı yardımıyla denklemi,

$$DB_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) - \frac{\sqrt{15}}{4}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)N(s) + \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5}s\right)q_N(s, \theta) \times C(s) \quad (4.4.18)$$

şeklinde ifade edilir. $q_N(s, \theta) = \cos\theta + \sin\theta N(s)$ birim reel kuaterniyondur.

(ii) Homotetik hareketler yardımıyla denklemi,

$$DB_\delta(s, \theta) = \delta(\varphi_B(s)) - \frac{\sqrt{15}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) N(s) + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) M_N C(s) \quad (4.4.19)$$

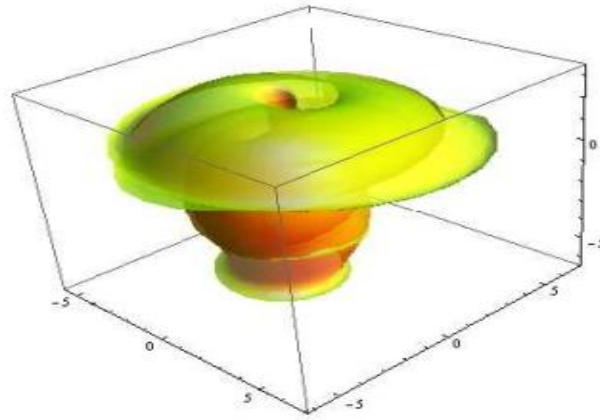
olarak verilir. (4.4.1) ile verilen M_N matrisi $q_N(s, \theta)$ birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen matristir.

(iii) yüzeyin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned} DB_\delta(s, \theta) = & \left(\frac{1}{5} \sin 8s + \frac{4}{5} \sin 2s + \frac{\sqrt{15}}{5} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \cos 5s \right. \\ & + \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \left(\cos \theta \sin 5s - \frac{3}{5} \sin \theta \cos 5s \right), \\ & \frac{1}{5} \cos 8s - \frac{4}{5} \cos 2s + \frac{\sqrt{15}}{5} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \sin 5s \\ & - \frac{\sqrt{5}}{4} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \left(\cos \theta \cos 5s + \frac{3}{5} \sin \theta \sin 5s \right), \\ & \left. \frac{4}{5} \sin 3s + \frac{3\sqrt{15}}{20} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\theta + \frac{\sqrt{15}}{5} s \right) \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

olarak hesaplanır.

Birim hızlı regüler $\alpha(s)$ eğrisinin $\delta(\varphi_B(s))$ binormaller gösterge eğrisi tarafından oluşturulan $DB_\delta(s, \theta)$ dolgu benzeri yüzeyinin grafiği Şekil 4.4.6 da verilmiştir.



Şekil 4.4.6 Binormaller Gösterge Eğrisinin Oluşturduğu Dolgu Benzeri Yüzey

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ilk olarak kanal ve tüp yüzeylerinin tanımı ve bu yüzeylerle ilgili önemli ifadeler verilmiştir. Ardından birim hızlı regüler bir eğrinin küresel gösterge eğrileri olan teğetler, normaller ve binormaller gösterge eğrileri tarafından üretilen kanal, tüp ve genelleştirilmiş tüp yüzeylerinin alternatif hareketli çatıya göre parametrizasyonları verilmiştir. Kuaterniyonlar ve bunlara karşılık gelen matrisler yardımıyla verilen denklemler daha sade biçimde ifade edilmiştir. Özellikle elde edilen tüp yüzeyleri için ortalama eğrilik fonskiyonları, Gauss eğrilik fonksiyonları, asimptotik eğri, geodezik eğri ve minimal eğri şartları verilmiştir. Teori de verilen ifadeler örnekler ile desteklenmiş ve grafikleri çizilmiştir. Kanal yüzeyine benzer şekilde birim hızlı regüler bir eğrinin küresel gösterge eğrileri ile üretilen dolgu (set), dolgu benzeri ve tüp dolgu benzeri yüzeylerin alternatif hareketli çatıya göre parametrizasyonları verilmiştir. Reel kuaterniyon çarpımı ve birim kuaterniyona karşılık gelen matrisler yardımıyla verilen denklemler daha basit biçimde ifade edilmiştir. İfade edilen teori verilen örnekler ile desteklenerek grafikleri çizilmiştir. Öklid uzayında Frenet çatısına göre gerek kanal gerekse dolgu yüzeylerinin ve bu yüzeylerin özel hallerini içeren oldukça fazla sayıda çalışma mevcuttur. Dahası bu çalışmalar farklı uzay ve eğri yüzey çatılarına da taşınmış ve çalışılmaya devam edilmektedir. Bu çalışmada Frenet çatısına alternatif olarak oluşturulan alternatif hareketli çatı ele alınmıştır. Eğrinin yanı sıra küresel gösterge eğrileri de dayanak eğrisi olarak kabul edilerek farklı bir bakış açısı kazandırılmaya çalışılmıştır. Bishop, Darboux çatısı gibi farklı eğri yüzey çatılarına ve Minkowski, Galileo, Pseudo Galileo gibi farklı uzaylara da genişletilebilir. Böylece teorik olarak farklı bakış açıları düşünülerek zenginleştirilebilir. Ayrıca, ele alınan bu yapı ve kavramlar özellikle mühendislik ve bilgisayar bilimleri, görüntü işleme gibi diğer alanlarla da yakından ilişkilidir dolayısıyla alanlar arası çalışmalar genişletilerek daha önemli ve uygulamalı sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Aslan, S., & Yaylı, Y. (2016). Canal surfaces with quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26, 31-38.
- Ateş, F., Kocakuşaklı, E., Gök, İ., & Yaylı, Y. (2018). A study of the tubular surfaces constructed by the spherical indicatrices in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 42(4), 1711-1725.
- Babaarslan, M., & Yaylı, Y. (2012). A new approach to constant slope surfaces with quaternions. *International Scholarly Research Notices*, 2012(1), 126358.
- Blaschke, W. (1956). Zur Affingometrie der Eilinien und Eiflächen. *Mathematische Nachrichten*, 15(4), 258-264.
- Do Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall.
- Doğan, F. (2012). *Genelleştirilmiş kanal yüzeyleri*. (Yayınlanmamış doktora tezi), Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Doğan, F., & Yaylı, Y. (2012). Parametrization of perspective silhouettes on canal surfaces in Minkowski 3-space. *J. Math. Comput. Sci.*, 2(2), 374-385.
- Gök, İ. (2017). Quaternionic approach of canal surfaces constructed by some new ideas. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1175-1190.
- Gray, A. (1999). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, (2nd edn.). CRC Press, Boca Raton.
- Gross, A. D. (1994). Analyzing generalized tubes. *Intelligent robots and computer vision XIII: 3D vision, product inspection, and active vision* (Vol. 2354, pp. 422-433).
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). *Lineer cebir*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hamilton, W. R. (1844). On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25(163), 10-13.
- Hartman, E. (2003). *Geometry and Algorithms for Computer Aided Design*. Dept. of Math. Darmstadt Univ. of Technology.
- Izumiya, S., & Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-164.
- Karacan, M. K., & Yaylı, Y. (2008). On the geodesics of tubular surfaces in Minkowski 3-space. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series*, 31(1), 1-10.
- Kazan, A., & Karadağ, H. B. (2019). Embankment Surfaces in Euclidean 3-space and their visualizations. *Communications in Mathematics and Applications*, 10(3), 617.

- Kocakuşaklı, E. (2025). A new view of the embankment surfaces with quaternionic perspective (Yayına gönderildi).
- Mahmoud, W. M., & Abd ElHafez, S. M. (2022). Weingarten Isotropic Embankment Surfaces According to Adapted Frame. *Information Sciences Letters*, 11(1), 12.
- Monge, G. (1795). *Geometrie Descriptive*, Paris.
- O'Neill, B. (1966). *Elementary differential geometry*. Academic Press.
- Özdemir, M. (2020). *Kuaterniyonlar ve Geometri*. Altın Nokta Yayınları.
- Şemin, F. (1983). *Differential Geometry I*. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Uçum, A., & İlarslan, K. (2016). New types of canal surfaces in Minkowski 3-space. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 449-468.
- Uzunoglu, B., Gök, İ., & Yaylı, Y. (2016). A new approach on curves of constant precession. *Applied Mathematics and Computation*, 275, 317-323.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ersoy KÜNTECİ

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Kırımlı İsmail Rüştü Olcay Lisesi, 2007

Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü, 2012

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Sinop Bahçeşehir Koleji Matematik
Öğretmeni, 2017-2025

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Ağrı Taşlıçay Anadolu Lisesi Matematik
Öğretmeni, 2025-...

Yayın Listesi :