

**T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**BAZI DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ VE OPTİMAL
KONTROL PROBLEMLERİ**

EMRE AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

PROF. DR. İSMAİL AYDIN

SİNOP-2025

TEZ KABUL

Emre AYDIN tarafından hazırlanan “**BAZI DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ VE OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ**” başlıklı bu çalışma, 25.08.2025 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından oybirliği ile **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Murat UZUNCA
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

**Üye
(Danışman)**

Prof. Dr. İsmail AYDIN
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye

Prof. Dr. Öznur KULAK
Amasya Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Onur ŞAHİN

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Emre AYDIN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DEĞİŞKEN ÜSLÜ DOĞRUSAL OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ VE OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

EMRE AYDIN

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: PROF. DR. İSMAİL AYDIN

Bu tez çalışması üç temel kısımdan oluşmaktadır. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde değişken üslü Lebesgue uzaylarının tarihçesi, maksimal operatörün önemi, kullanım alanları ve $p(x)$ -Laplacian denklemleri ele alınmıştır. Tezde kullanılan temel bilgiler ikinci bölümde verilmiştir. Bulgular bölümünün birinci kısmında $L^{p(x)}(\Omega)$ değişken üslü Lebesgue ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ Sobolev uzaylarının tanımları ve bazı temel özellikleri incelendi. Ayrıca bulgular kısmında homojen ve doğrusal olmayan $p(x)$ -Laplacian (Dirichlet) denkleminin zayıf çözümleri ve bir optimal kontrol problem ele alınmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev Uzayları; Zayıf Çözüm,
 $p(x)$ - Laplacian operatörü, Poincare eşitsizliği

ABSTRACT

MSC THESIS

THE SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR VARIABLE EXPONENT PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

EMRE AYDIN

**SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

SUPERVISOR: PROF. DR. İSMAİL AYDIN

This thesis study consists of three basic parts. The first chapter is an introduction, and in this chapter, the history of variable exponent Lebesgue spaces, the importance of the maximal operator, its usage areas and $p(x)$ -Laplacian equations are discussed. The basic information used in the thesis is given in the second chapter. In the first part of the findings section, definitions and some basic properties of variable exponent Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ and Sobolev spaces $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ were given. Additionally, some weak solutions of the homogeneous and non-linear $p(x)$ -Laplacian (Dirichlet) equation and optimal control problems were examined in the findings section.

KEYWORDS: Variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces; Weak Solution, $p(x)$ -Laplacian operator, Poincare inequality

TEŞEKKÜR

Öncelikle tezimin her aşamasında bilgi birikimi ve tecrübesini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen, beni daima cesaretlendiren ve çalışmamın bu aşamaya gelmesini sağlayan saygıdeğer hocam Prof. Dr. İsmail AYDIN'a teşekkürlerimi sunarım. Gerek seminer gerek tez çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen değerli aileme teşekkür ederim. Ayrıca değerli görüş ve önerileriyle savunma sürecime rehberlik eden jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Murat UZUNCA'ya ve Sayın Prof. Dr. Öznur KULAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.



Emre AYDIN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ KABUL.....	ii
ETİK BEYANI.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Bazı Tanımlar ve Kavramlar.....	5
2.2. Değişken Üslü Lebesgue ve Sobolev Uzayları	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	9
4. BULGULAR	10
4.1. Değişken Üslü Homojen Olmayan Öz Değer Sınır Problemi	10
4.2. Doğrusal Olmayan Bir $p(x)$ -Laplacian Optimal Kontrol Problemi	15
4.3. Orlicz ve Sobolev Üzerine Ön Bilgiler – Orlicz Uzayları.....	19
4.4. Kabul Edilebilir Çözüm Kümelerinin Bazı Yardımcı Sonuçları ve Özellikleri.....	21
4.5. Optimal Kontrol Probleminin Çözülebilirliği Üzerine.....	23
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	25
KAYNAKLAR.....	26
ÖZGEÇMİŞ.....	27

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^N$	: N-boyutlu reel Öklid uzayı
∇	: Gradient (vektör değerli kısmi türev operatörü)
$\bar{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$L^{p(x)}(\Omega)$	: Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p(x)}(\Omega)$	: Değişken üslü Sobolev uzayı
$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$	: Ω nın sınırında sıfır değerini alan Sobolev uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Her mertebeden sürekli türevlenebilir kompakt destekli fonksiyonların uzayı (test uzayı)
$X \hookrightarrow Y$	: X Uzayının Y uzayına sürekli gömülmesi
$X \hookhookrightarrow Y$	: X uzayının Y uzayına kompakt gömülmesi

1. GİRİŞ

Literatürde değişken üslü Sobolev uzaylarındaki en önemli çalışma Kovacic ve Rakosnik (1991) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada en genel durumda değişken üslü Sobolev uzaylarının birçok temel özellikleri verildi. Yine Fan ve Zhao (2001) sınırlı bölgede Sobolev gömme teoremini ve $C^\infty(\Omega)$ uzayının değişken üslü Sobolev uzayında yoğunluğunu göstermiştir.

Sobolev uzayları, kısmi diferansiyel denklemler, matematiksel fizik, diferansiyel geometri ve daha birçok çeşitli matematiksel analizin teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynar. Yine başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin çözümünde kullanılır. Değişken üslü fonksiyon uzayları, son yıllarda, elastik mekanik, akışkanlar dinamiği ile ilgili problemler üzerine çalışılmaktadır. Ruzicka (2000) katsayıları değişken büyüme oranlı doğrusal olmayan sistem içeren elektoreolojik akışkanlar (EA) için matematiksel model üzerinde çalıştı. EA etkisi, robot bilimi ve uzay teknolojisinde kullanılmakta ve deneysel araştırmalar Nasa laboratuvarlarında yapılmaktadır.

Sobolev uzayları literatürde ilk olarak Sobolev (1938) tarafından tanımlanmıştır. Sobolev, yaptığı çalışmalarda klasik Sobolev uzayı ile klasik Lebesgue uzayı ve $C^m(\mathbb{R}^N)$ uzayları arasındaki gömülme teoremlerini vermiştir. Yine çok değişkenli türevlenebilir fonksiyonlar için genel integral eşitsizlikleri ispatlamış ve bunları matematiksel fiziğin birçok problemde uygulamıştır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ilk kez Orlicz (1931) tarafından tanımlanmıştır. Orlicz uzaylarının bir genelleştirilmesi olan modüler uzaylar düzenli olarak ilk kez Nakano (1950), (1951) tarafından çalışıldı. Fakat buna rağmen Orlicz uzayları kadar ilgi görmedi. 1970 ve 1980'li yıllarda, modüler fonksiyon uzayları, (Hudzik, 1976), (Hudzik, 1983), (Musielak, 1983) başta olmak üzere birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, (Sharapudinov, 1979) çalışmasında $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayı üzerindeki topoloji üzerine bazı incelemeler yapılmıştır.

Literatürde değişken üslü Lebesgue uzaylarındaki en önemli çalışma Kovacic ve Rakosnik (1991) tarafından ele alınmıştır. Değişken üslü Lebesgue uzayı olarak ifade edilen uzayının özel bir Orlicz-Musielak uzayı olduğu ve $p(\cdot) = p$ sabit alındığında, değişken üslü Lebesgue uzayının, klasik Lebesgue uzayı olacağı çalışmada yer alan özelliklerinden birkaçıdır. Değişken üslü Lebesgue uzayları ile klasik Lebesgue uzaylarının ortak birçok özellikleri olmasına rağmen, ötelemeler altında değişmezliği,

ötelemelerin sürekliliği ve girişim gibi bazı önemli özellikler uzayında $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ uzayında sağlanmaz (Kovacik ve Rakosnik, 1991).

Ω , $\mathbb{R}^N$ kümesinin sınırlı bir açık alt kümesi olsun. Doğrusal kısmi diferansiyel denklemlerin temel teoreminde önemli bir sonuç $H_0^1(\Omega)$, yani $L^2(\Omega)$ de tanımlı birinci mertebeden sınırda sıfır değerli Sobolev uzayı $W_0^{1,2}(\Omega)$ uzayında Laplace operatörünün ayrık olduğunu ileri sürer. Daha açık bir şekilde ifade edersek,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

problemi sınırsız bir özdeğerler $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ dizisine sahiptir. Bu önemli sonuç, Hilbert uzayları üzerinde ki eşlenik ve kompakt operatörlerin Riezs-Fredholm teorisine dayanır.

Bir sabit olmayan sürekli $p(\cdot)$ fonksiyonu için $p(x)$ -Laplace opeartörü $\Delta_{p(x)}u := \text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$, şeklinde tanımlanır. Bu diferansiyel operatör $p > 1$ olmak üzere $\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ ile tanımlı p -Laplace operatörünün bir doğal genellemesidir. Ancak, $p(x)$ -Laplace opeartörü, sabit p -Laplace operatörüne göre daha çok karmaşık doğrusal olmayan durumlar içerir.

Mihailescu ve Radulescu (2007) yapmış oldukları çalışmalarında, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ düzgün sınırlara sahip sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$ bir reel sayı, p ve q değişken fonksiyonları Ω üzerinde sürekli olmak üzere, homojen olmayan

$$\begin{cases} -\text{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda|u|^{q(x)-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

özdeğer probleminin zayıf çözümlerini $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında incelemişlerdir. Bu problemin özel bir durumu Fan, Zhang ve Zhao (2005) tarafından $p(x)=q(x)$ için ele alınmış ve kritik nokta teorisini kullanarak bir zayıf çözümler dizisinin varlığını ortaya koymuşlardır. Negatif olmayan tüm zayıf çözümlerin kümesi A olmak üzere Fan, Zhang ve Zhao, $\sup A = +\infty$ olduğunu göstermişler ve bazı koşullar altında $\inf A > 0$ olduğunu belirtmişlerdir. Eğer $p(x) = p = \text{sabit}$ olması durumunda p -Laplace operatörü, $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, için her zaman $\inf A > 0$ olduğu biliniyor.

Optimal kontrol, dinamik sistemlerin belirli bir hedefe en verimli şekilde ulaşmasını sağlamak için geliştirilmiş matematiksel bir yöntemdir. Bu alan, mühendislik, ekonomi, biyoloji ve birçok diğer disiplinlerde karmaşık sistemlerin yönetimi ve optimizasyonu için kritik bir rol oynamaktadır. Kontrol teorisi, sistemin davranışını analiz ederken,

optimal kontrol, belirli bir performans ölçütüne ulaşmak için kontrol girdilerinin nasıl seçileceğini belirler. Optimal kontrolün temel amacı, belirli bir zaman diliminde en iyi çözümü, genellikle bir maliyet fonksiyonunu minimize etmek veya bir fayda fonksiyonunu maksimize etmek şeklinde formüle eder.

Optimal kontrol teorisi, 20. yüzyılın ortalarına doğru gelişmeye başlamıştır. Bu alandaki ilk önemli gelişmelerden biri, Richard Bellman'ın 1950'lerde ortaya koyduğu Dinamik Programlama (Dynamic Programming, DP) yöntemidir. Bellman'ın dinamik programlama yaklaşımı, birçok farklı kontrol kararının birbirini takip ettiği dinamik sistemler için çözümler üretilmesine olanak sağlamıştır. Bu metodun yanında, daha sonra geliştirilmiş olan Pontryagin'in Maksimum Prensibi (Pontryagin's Maximum Principle, PMP) ve Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemleri de optimal kontrol alanında temel araçlar olmuştur. Sonraki yıllarda optimal kontrol teorisi, robotik, otomatik kontrol sistemleri, enerji yönetimi, ulaşım ve havacılık gibi birçok endüstriyel uygulama alanına adapte edilmiştir. Bu alanlardaki gelişmeler, yeni optimizasyon algoritmalarının ve modelleme tekniklerinin ortaya çıkmasını teşvik etmiştir.

Optimal kontrol problemleri genellikle matematiksel modeller aracılığıyla tanımlanır. Bu modeller, bir kontrol sistemi ve bu sistemin dinamiklerini belirleyen diferansiyel denklemler içerir. Bu denklemler doğrultusunda kontrol sinyalleri (örneğin, hız, güç veya yön) belirli bir maliyet fonksiyonunu minimize etmek amacıyla optimizasyon yoluyla çözülür.

Dinamik programlama, optimal kontrol problemlerini çözmek için kullanılan güçlü bir yöntemdir. Bu yöntem, problemi küçük alt problemlere ayırarak çözüm bulmayı hedefler. Ancak, DP'nin hesaplama maliyeti çok yüksek olabileceği için, uygulamalarda genellikle daha verimli algoritmalar kullanılır. Optimal kontrolün uygulama alanları çok geniştir. Bu alanlardan bazıları şunlardır: Robotik ve Otonom Araçlar: Optimal kontrol, robotların çevresel faktörlere tepki vererek belirli görevleri en verimli şekilde yerine getirmesini sağlar. Otonom araçlar için de yol alma, hız kontrolü ve enerji verimliliği gibi unsurlar optimal kontrol ile yönetilebilir.

Enerji Sistemleri: Enerji üretim ve dağıtım sistemlerinde, enerji tüketimi ve üretimi arasındaki dengeyi optimize etmek, sürdürülebilir enerji yönetimi açısından kritik bir rol oynar.

Havacılık ve Uzay: Roketlerin ve uçakların yolculukları sırasında optimal hız, yön ve yakıt kullanımı gibi parametrelerin belirlenmesi için optimal kontrol algoritmaları kullanılmaktadır.

Sağlık Bilimleri: Optimal tedavi planlarının oluşturulması, ilaç dozajlarının belirlenmesi ve diğer tıbbi prosedürlerin optimizasyonu gibi sağlık alanlarında da optimal kontrol büyük bir öneme sahiptir. Optimal kontrol teorisi, karmaşık dinamik sistemlerin daha verimli yönetilmesini sağlayan güçlü bir araçtır. Ancak, bu alandaki teorik gelişmeler ve uygulamalar, teknoloji ve hesaplama gücündeki ilerlemelerle sürekli olarak evrilmektedir.

Bu tez çalışmasında homojen ve doğrusal olmayan bir özdeğer $p(x)$ -Laplasyan (1.1) probleminin varyasyonel yöntemler kullanılarak zayıf çözümlerinin ve öz değerlerinin varlığı, ve bir Dirichlet sınır değer optimal kontrol probleminin optimal çözümlerinin bazı koşullar altında $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında ele alınacaktır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümünde, tezde yararlanacağımız temel tanımlar ve teoremlerden verilecektir.

2.1. Bazı Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 2.1.1. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $X \subset Y$ olsun. Eğer herhangi bir $f \in X$ fonksiyonu için $\|f\|_Y \leq c \|f\|_X$ olacak şekilde bir $c > 0$ varsa X uzayı Y uzayına sürekli olarak gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Kufner ve ark., 1977).

Tanım 2.1.2. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Eğer, $X \hookrightarrow Y$ sağlanıyorsa ve her $(x_n) \subset X$ sınırlı dizisi için $(T(x_n)) \subset Y$ operatör dizisinin yakınsak bir alt dizisi bulunuyorsa, X uzayı Y uzayına kompakt olarak gömülür denir ve $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Kufner ve ark., 1977).

Teorem 2.1.3. $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ iki normlu uzaylar ve X yansımali bir uzay olsun. Ayrıca, $T : X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Bu takdirde, $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ olması için gerek ve yeter koşul, T operatörünün X uzayında zayıf yakınsak dizileri Y uzayında kuvvetli yakınsak dizilere dönüştürmesidir (Ciarlet, 2013).

Tanım 2.1.4. (Klasik L^p Uzayı): $\Omega, \mathbb{R}^N$ 'nin ölçülebilir bir alt kümesi, $|\Omega| > 0$ ve Ω kümesi üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi $S(\Omega)$ olsun Bu takdirde

$$L^p(\Omega) = \{u \in S(\Omega) : \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, 1 \leq p < \infty\}$$

olan fonksiyonların denklik sınıflarının uzayına $L^p(\Omega)$ Lebesgue uzayı adı verilir. Bu takdirde $u \in L^p(\Omega)$ olmak üzere

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ fonksiyonu $L^p(\Omega)$ üzerinde bir normdur ve bu norma göre bir Banach uzayıdır.

2.2. Değişken Üslü Lebesgue ve Sobolev Uzayları

Tanım 2.2.1. $\Omega, \mathbb{R}^N$ 'de bir açık bölge olsun. Bu takdirde $p: \Omega \rightarrow (1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyona değişken üs denir. Yine bir $p \in C(\bar{\Omega})$ ve her $x \in \bar{\Omega}$ için $p(x) > 1$ olsun. Bu takdirde

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{p \in C(\bar{\Omega}): \text{her } x \in \bar{\Omega} \text{ için } p(x) > 1\}$$

kümesi ve bir $p \in C_+(\bar{\Omega})$ için

$$p^+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) \text{ ve } p^- = \inf_{x \in \Omega} p(x)$$

değişken üsleri tanımlansın.

Bir $u \in S(\Omega)$ ve $p \in C_+(\bar{\Omega})$ için

$$L^{p(x)}(\Omega) = \{u \in S(\Omega): \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonların denklik sınıflarının vektör uzayına değişken üslü Lebesgue uzayı denir. Ayrıca $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere

$$\|u\|_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0: \int_{\Omega} \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_{p(x)}$ fonksiyonu $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Luxemburg norm) ve bu norma göre bir Banach uzayıdır.

Değişken üslü Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı, $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ olmak üzere, $L^{q(x)}(\Omega)$ uzayıdır. Ayrıca herhangi bir $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ için

$$\left| \int_{\Omega} u v dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)} \quad (2.2.1)$$

Hölder eşitsizliği elde edilir (Kovacik ve Rakosnik (1991)).

Eğer Ω sonlu ölçümlü bir küme, p_1, p_2 değişken üs fonksiyonları ve h.h.h $x \in \Omega$ için $p_1(x) \leq p_2(x)$ ise $L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi vardır.

Değişken üslü Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ uzaylarında önemli bir rolü olan modüler fonksiyonu $\rho_{p(x)}: L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır. Değişken üslü Lebesgue $L^{p(x)}(\Omega)$ uzaylarında norm-modüler ilişkisi aşağıdaki önerme de verilmiştir.

2.2.2.Önerme: Bir $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde;

- i) $\|u\|_{p(x)} \leq 1 \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) \leq 1,$
- ii) $\|u\|_{p(x)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+},$
- iii) $\|u\|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-},$
- iv) $\|u_n - u\|_{p(x)} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u_n - u) \rightarrow 0$ (Kovacık ve Rakosnik (1991)).

Şimdi $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayına ait fonksiyon örnekleri verelim.

2.2.3. Örnek: $p(x) = x$ ve $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ için $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ dir. Gerçekten, $\rho_{p(x)}$ nin tanımından

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_{[1,2]} |e^{\frac{1}{x}}|^x dx = \int_{[1,2]} e dx$$

elde edilir. Son eşitlikte $\lambda = 1 > 0$ olup e fonksiyonu $[1,2]$ de sürekli olduğundan Lebesgue integral ile Riemann integrali çakışır. Yani integral sonlu olup, $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ elde edilir.

2.2.4. Örnek: $\Omega = [0,1]$, $p(x) = \frac{1}{x}$ ve $f(x) = 4^{-x} x^{-\frac{x}{2}}$ için $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ dir. Bu durumda

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_{[0,1]} \left| 4^{-x} x^{-\frac{x}{2}} \right|^{\frac{1}{x}} dx = \int_{[0,1]} 4^{-1} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

olur. Bir fonksiyonun Riemann integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşulun h.h.h. sürekli olmasıdır. Böylece $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sadece $x = 0$ noktasında süreksiz olup, h.h.h. sürekli Dir Dolayısıyla fonksiyon Riemann integrallenebilir. O halde

$$\rho_{p(x)}(f) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} < \infty$$

olur. Buradan $\rho_{p(x)}(f) < \infty$ dur yani $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ elde edilir.

Şimdi Klasik Lebesgue Uzayı ile Değişken Üslü Lebesgue Uzayı arasındaki ilişkiyi verelim.

2.2.5. Önerme: $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere $p(\cdot) \equiv p$ sabit olarak alınırsa $L^{p(x)}(\Omega) = L^p(\Omega)$ olur (Diening ve arkadaşları, 2011).

İspat: $1 \leq p < \infty$ için $p(\cdot) \equiv p$ sabit olsun. $\|f\|_{p(\cdot)} < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul

$\|f\|_p < \infty$ olmasıdır. Gerçekten $\|f\|_{p(\cdot)} < \infty$ ise $\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı

vardır. O halde

$$\frac{1}{\lambda^p} \int_{\Omega} |f|^p dx \leq 1$$

yazılır. Buradan $\int_{\Omega} |f|^p dx \leq \lambda^p$ olup $\|f\|_p \leq \lambda < \infty$ elde edilir. Dolayısıyla $1 \leq p < \infty$ için

$L^{p(x)}(\Omega) = L^p(\Omega)$ elde edilir.

2.2.6.Tanım(Değişken Üslü Sobolev Uzayı): Ω kümesinin sınırında sıfır değerini alan Sobolev uzayı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ test fonksiyonlar uzayının

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{p(x)}$$

normuna göre kapanışı olarak tanımlanır, ve

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega) \mid |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\}$$

Sobolev uzayının bir alt uzayıdır. Ayrıca $(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \|\cdot\|)$ uzayı ayrılabilir ve yansılmalı bir Banach uzayıdır.

Değişken üslü Sobolev $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında önemli bir kompakt gömülme özelliği aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.2.7: $p(x) < N$ olmak üzere

$$p^*(x) = \frac{Np(x)}{N - p(x)}$$

değişken üssü verilsin. Bu takdirde bir $s \in C_+(\bar{\Omega})$ ve her $x \in \bar{\Omega}$ için eğer $s(x) < p^*(x)$ ise $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{s(x)}(\Omega)$ sürekli ve kompakt gömülmesi vardır (Mihăilescu ve Rădulescu, 2007).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünde değişken üslü Lebesgue uzayı tanımlanarak (Mihailescu and Radulescu (2007) ve (Kogut ve Tkachenko (2016) çalışmalarındaki bazı özellikler ele alındı. Daha sonra değişken üslü Lebesgue ve Sbolev uzaylarının temel özellikleri ele alındı. Mihailescu and Radulescu (2007) çalışmasındaki teknikler kullanılarak bu makalede ele alınan $p(x)$ -Laplacian denkleminin zayıf çözümleri ve özdeğerleri incelendi. Son kısımda ise (Kogut ve Tkachenko (2016) çalışmasındaki metot ve yöntemler kullanılarak optimal kontrol problemin çözümleri incelenmiştir.



4. BULGULAR

4.1. Değişken Üslü Homojen Olmayan Öz Değer Sınır Problemi

Bu bölümde homojen olmayan

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = \lambda|u|^{q(x)-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

özdeğer probleminin zayıf çözümlerini $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında elde edilmiştir.

4.1.1.Tanım. Eğer her $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u v dx = 0 \quad (4.1.2)$$

olacak şekilde bir $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ fonksiyonu varsa $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısına (4.1.1) probleminin bir öz değeri, $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ fonksiyonuna da (4.1.1) probleminin bir zayıf çözümü denir.

Bu tezde $1 < \inf_{x \in \Omega} q(x) < \inf_{x \in \Omega} p(x) < \sup_{x \in \Omega} q(x), \sup_{x \in \Omega} p(x) < N$ ve her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < \frac{Np(x)}{N-p(x)}$ olduğu kabul edilmiştir.

Tezin bu bölümünde (4.1.1) denkleminin zayıf çözümünün varlığı ile ilgili aşağıdaki ana teorem ispatlanmıştır.

4.1.2.Teorem. Her $x \in \bar{\Omega}$ için $1 < \min_{x \in \Omega} q(x) < \min_{x \in \Omega} p(x) < \max_{x \in \Omega} q(x), \max_{x \in \Omega} p(x) < N$ ve $q(x) < p^*(x)$ olsun. Bu taktirde (4.1.1) denkleminin her $\lambda \in (0, \lambda^*)$ için bir $\lambda^* > 0$ özdeğeri (dolayısıyla bir zayıf çözümü) vardır.

Bu bölümde (4.1.1) denkleminin zayıf çözümünün varlığını göstermek için bu denkleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli her $\lambda > 0$ için $J_{\lambda}: W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$J_{\lambda}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} dx \quad (4.1.3)$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan J_{λ} enerji fonksiyonelinin Gateux türevi vardır ve $J_{\lambda} \in C^1(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \mathbb{R})$ olup, türevi de her $u, v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\langle J'_{\lambda}(u), v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u v dx \quad (4.1.4)$$

şeklindedir. Böylece (4.1.1) denkleminin zayıf çözümleri J_λ fonksiyonelinin kritik noktaları ile çakışır. Eğer böyle bir aşık olmayan (nontrivial) zayıf çözüm varsa ona karşılık gelen λ , denklemin bir özdeğeri olur.

4.1.3 Yardımcı Teorem. Herhangi bir $\lambda \in (0, \lambda^*)$ ve $\forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için $\|u\| = \rho$ olmak üzere $J_\lambda(u) \geq a > 0$ olacak şekilde $\lambda^*, \rho, a > 0$ sayıları vardır.

İspat. Her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ olduğundan, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı $L^{q(x)}(\Omega)$ içine sürekli olarak gömülür. Dolayısıyla her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{q(x)} \leq c_1 \|u\| \quad (4.1.5)$$

olacak şekilde bir $c_1 > 0$ pozitif reel sayısı vardır. Eğer $\rho < \frac{1}{c_1}$ olacak şekilde bir $\rho \in (0,1)$ sayısı varsa, (4.1.5) bağıntısından dolayı $\|u\| = \rho$ olan her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için $\|u\|_{q(x)} < 1$ yazılır. Ayrıca 2.2.2.Önerme den dolayı $\|u\| = \rho$ olan her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq \|u\|_{q(x)}^{q^-} \quad (4.1.6)$$

olur. Eğer (4.1.5) ve (4.1.6) bağıntıları kullanılırsa $\|u\| = \rho$ olan her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \leq c_1^{q^-} \|u\|^{q^-} \quad (4.1.7)$$

bulunur. Eğer enerji fonksiyonelinin tanımı ve (4.1.7) eşitsizliği kullanılırsa, $\|u\| = \rho$ olan her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} J_\lambda(u) &\geq \frac{1}{p^+} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{q^-} \int_{\Omega} |u|^{q(x)} dx \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} c_1^{q^-} \|u\|^{q^-} \\ &= \frac{1}{p^+} \rho^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} c_1^{q^-} \rho^{q^-} \\ &= \rho^{q^-} \left(\frac{1}{p^+} \rho^{p^+ - q^-} - \frac{\lambda}{q^-} c_1^{q^-} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliği kullanarak

$$\lambda^* = \frac{\rho^{p^+-q^-}}{2p^+} \cdot \frac{q^-}{c_1^{q^-}} \quad (4.1.8)$$

sayısını tanımlarsak, herhangi bir $\lambda \in (0, \lambda^*)$ ve $\|u\| = \rho$ olmak üzere $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için $J_\lambda(u) \geq a > 0$ olacak şekilde bir $a = \frac{\rho^{p^+}}{2p^+} > 0$ sayısı vardır. Bu ise ispatı tamamlar.

4.1.4 Yardımcı Teorem. Yeterince küçük küçük $t > 0$ için $J_\lambda(t\phi) < 0$ olacak şekilde bir $\phi \geq 0$, $\phi \neq 0$ ve $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır.

Kanıt: Denklemdeki üs fonksiyonları için $\min_{x \in \Omega} q(x) < \min_{x \in \Omega} p(x)$ olduğu kabul edilmiştir. Buradan $q^- < p^-$ olur. Keyfi $\epsilon_0 > 0$ sayısı için $q^- + \epsilon_0 < p^-$ olur. Öte yandan $q \in C(\bar{\Omega})$ olduğundan, tüm $x \in \Omega_0$ için $|q(x) - q^-| < \epsilon_0$ olacak şekilde bir $\Omega_0 \subset \Omega$ açık kümesi vardır. Böylece tüm $x \in \Omega_0$ için $q(x) \leq q^- + \epsilon_0 < p^-$ elde edilir. Ayrıca Ω kümesinde $0 \leq \phi \leq 1$ ve her $x \in \bar{\Omega}_0$ için $\text{supp}(\phi) \supset \Omega_0$ olacak şekilde bir $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. Yine herhangi bir $t \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\phi) &= \int_{\Omega} \frac{t^{p(x)}}{p(x)} |\nabla \phi|^{p(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{t^{q(x)}}{q(x)} |\phi|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{q^+} \int_{\Omega} t^{q(x)} |\phi|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx - \frac{\lambda}{q^+} \int_{\Omega_0} t^{q(x)} |\phi|^{q(x)} dx \\ &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx - \frac{\lambda \cdot t^{q^- + \epsilon_0}}{q^+} \int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)} dx. \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu nedenle

$$0 < \delta < \min \left\{ 1, \frac{\frac{\lambda \cdot p^-}{q^+} \int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)} dx}{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx} \right\}$$

olmak üzere $t < \delta^{\frac{1}{p^- - q^-}} \epsilon_0$ için $J_\lambda(t\phi) < 0$ eşitliği sağlanır.

Son olarak $\int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p(x)} dx > 0$ dır. Gerçekten,

$$\int_{\Omega_0} |\phi|^{q(x)} dx \leq \int_{\Omega} |\phi|^{q(x)} dx \leq \int_{\Omega} |\phi|^{q^-} dx.$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $W_0^{1,p^{(x)}}(\Omega)$ uzayı sürekli olarak $L^{q^-}(\Omega)$ uzayına içine gömülü olduğundan, $\|\phi\|_{q(x)} \leq c_2 \|\phi\|$ olacak şekilde bir $c_2 > 0$ pozitif sabiti vardır. Son iki eşitsizlikten $\|\phi\| > 0$ ve $\int_{\Omega} |\nabla \phi|^{p^{(x)}} dx > 0$ elde edilir.

4.1.2. Teoreminin İspatı. Bir $\lambda^* > 0$ sayısını (4.1.8) deki seçilsin ve $\lambda \in (0, \lambda^*)$ olsun. Yine 4.1.3 Yardımcı Teorem den dolayı, $W_0^{1,p^{(x)}}(\Omega)$ uzayında tanımlı, ρ yarıçaplı ve 0 merkezli $B_{\rho}(0)$ yuvarın sınırında $\inf_{\partial B_{\rho}(0)} J_{\lambda} > 0$ yazılır. Öte yandan, 4.1.4 Yardımcı Teoremden dolayı, yeterince küçük küçük $t > 0$ için $J_{\lambda}(t\phi) < 0$ olacak şekilde bir $\phi \in W_0^{1,p^{(x)}}(\Omega)$ fonksiyonu vardır. Böylece, her $u \in B_{\rho}(0)$ için

$$J_{\lambda}(u) \geq \frac{1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{\lambda}{q^-} c_1^{q^-} \|u\|^{q^-}$$

ve

$$-\infty < \underline{c} := \inf_{B_{\rho}(0)} J_{\lambda} < 0$$

elde edilir.

Bir $0 < \epsilon < \inf_{\partial B_{\rho}(0)} J_{\lambda} - \inf_{B_{\rho}(0)} J_{\lambda}$ sayısı verilsin. Bu takdirde Ekeland varyasyonel ilkesi $J_{\lambda}: \overline{B_{\rho}(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneline uygulanırsa,

$$J_{\lambda}(u_{\epsilon}) < \inf_{B_{\rho}(0)} J_{\lambda} + \epsilon,$$

$$J_{\lambda}(u_{\epsilon}) < J_{\lambda}(u) + \epsilon \cdot \|u - u_{\epsilon}\|, u \neq u_{\epsilon}$$

olacak şekilde bir $u_{\epsilon} \in \overline{B_{\rho}(0)}$ fonksiyonu vardır. Yine

$$J_{\lambda}(u_{\epsilon}) \leq \inf_{B_{\rho}(0)} J_{\lambda} + \epsilon \leq \inf_{B_{\rho}(0)} J_{\lambda} + \epsilon < \inf_{\partial B_{\rho}(0)} J_{\lambda}$$

olduğundan dolayı $u_{\epsilon} \in B_{\rho}(0)$ sonucuna varılır. Bir $I_{\lambda}: \overline{B_{\rho}(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $I_{\lambda}(u) = J_{\lambda}(u) + \epsilon \cdot \|u - u_{\epsilon}\|$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca u_{ϵ} elemanı I_{λ} fonksiyonunun bir minimum noktasıdır ve dolayısıyla $t > 0$ ve her $v \in B_1(0)$ için

$$\frac{I_\lambda(u_\varepsilon + t.v) - I_\lambda(u_\varepsilon)}{t} \geq 0$$

olur. Yine yukarıdaki bağıntıdan

$$\frac{J_\lambda(u_\varepsilon + t.v) - J_\lambda(u_\varepsilon)}{t} + \varepsilon \cdot \|v\| \geq 0$$

yazılır. Eğer $t \rightarrow 0$ için limit alınırsa $\langle J'_\lambda(u_\varepsilon), v \rangle + \varepsilon \cdot \|v\| > 0$ ve $\|J'_\lambda(u_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$ (operatör norm) sonucuna ulaşılır. Böylece

$$J_\lambda(w_n) \rightarrow c \text{ ve } J'_\lambda(w_n) \rightarrow 0 \quad (4.1.8)$$

olacak şekilde bir $\{w_n\} \subset B_\rho(0)$ dizisi vardır. Dolayısıyla $\|w_n\| < \rho$ olup, $\{w_n\}$ dizisi $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında sınırlı olur. Ayrıca $(W_0^{1,p(x)}(\Omega), \|\cdot\|)$ uzayı yansımali bir Banach uzayı olduğundan dolayı $\{w_n\}$ dizisinin $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ elemanına zayıf yakınsak bir $\{w_n\}$ (aynı diziyi alındı) alt dizisi vardır. Diğer taraftan her $x \in \bar{\Omega}$ için $q(x) < p^*(x)$ olduğundan dolayı, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ Sobolev uzayı $L^{q(x)}(\Omega)$ uzayına sürekli gömülme dönüşümü kompakt olduğundan dolayı $\{w_n\}$ dizisi $L^{q(x)}(\Omega)$ uzayında w elemanına kuvvetli yakınsar. Eğer Hölder eşitsizliği ve $\{w_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsama özelliği kullanılırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |w_n|^{q(x)-2} w_n (w_n - w) dx = 0.$$

Diğer taraftan, (4.1.8) olması göz önüne alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle J'_\lambda(w_n), w_n - w \rangle = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla w_n|^{p(x)-2} \nabla w_n \nabla (w_n - w) dx = 0 \quad (4.1.9)$$

bulunur. Yine (4.1.9) ve $\{w_n\}$ dizisinin $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ elemanına zayıf yakınsak olmaları da kullanılırsa, Fan ve Zhang (2003) çalışmasındaki Teorem 3.1 den dolayı $\{w_n\}$ dizisinin $w \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonuna güçlü yakınsar. Böylece (4.1.8) bağıntısından

$$J_\lambda(w) = c \leq 0 \text{ ve } J'_\lambda(w) = 0$$

olduğu görülür. Bu ise w fonksiyonunun (4.1.1) denkleminin aşıkâr olmayan (nontrivial) (1.1) bir zayıf çözümü ve herhangi bir $\lambda \in (0, \lambda^*)$ değerin de problemin bir özdeğeri olduğu sonucuna ulaşılır.

4.2. Doğrusal Olmayan Bir $p(x)$ -Laplacian Optimal Kontrol Problemi

Kogut ve Tkachenko (2016) yapmış oldukları çalışmalarında (4.2.1) doğrusal olmayan, elliptic $p(x)$ -Laplacian bir Dirichlet optimal kontrol sınır değeri problemini ele almışlar ve kabul edilebilir kümeler (admissible sets) üzerinde Minty anlamında en azından bir çözümünün var olduğunu ispatlanmıştır. Ayrıca bu problemin çözümü için gerekli olan değişken üslû Lebesgue ve Sobolev uzayları için bazı temel tanımlar, teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

$N \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{R}^N$ kümesinin açık, sınırlı ve bağlantılı bir Ω alt kümesi ve yeterince düzgün Ω kümesinin sınırı $\partial\Omega$ verilsin. Yine hemen hemen her $x \in \Omega$ için $1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty$, $f \in L^\infty(\Omega)^N$, $p_d \in L^2(\Omega)$ ve $y_d \in L^\alpha(\Omega)$ olsun. Ayrıca $|\cdot|$ ifadesi $\mathbb{R}^N$ de Öklid normunu göstermektedir. Bir Dirichlet $p(x)$ -Laplacian sınır değeri problemi

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla y|^{p(x)-2} \nabla y) = -\operatorname{div} f, & x \in \Omega, \\ y = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

ve $p(x)$ değişken üs kontrol fonksiyonu için kabul edilebilir küme (admissible set)

$$p(x) \in \mathcal{P}_{ad} = \{p \in L^2(\Omega) : \text{h. h. h. } x \in \Omega \text{ için } 1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty\} \quad (4.2.2)$$

kısıtlarına karşılık gelen Optimal Kontrol Problem (OCP)

$$\text{Minimize } \left\{ J(p, y) = \int_{\Omega} |y(x) - y_d|^\alpha dx + \gamma \int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |p(x) - p_d|^2 dx \right\} \quad (4.2.3)$$

şeklindedir. Yine literatürde (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) optimal kontrol probleminin çözümlerinin varlığı ile ilgili açık sorular vardır. Benzer tipte sistemler için sınır optimal kontrol problemleri ile ilgili literatürde çok az çalışma vardır (Hömborg ve arkadaşları (2010), Hryniv (2009)). Bunun birçok sebebi aşağıda belirtilmiştir:

(i) (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) probleminin kabul edilebilir çözümler kümesinin, karşılık gelen fonksiyonel uzayda zayıf bir şekilde kapalı olup olmadığı bilinmemektedir;

(ii) (4.2.1) sınır değer probleminin zayıf çözümleri (Minty anlamında) için önceden belirlenmiş tahmini yoktur;

(iii) (4.2.3) maliyet (cost functional) fonksiyoneline göre en aza indirgeme dizisinin asimptotik davranışı genel olarak belirsizdir.

(4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) optimizasyon probleminin bu ve diğer karakteristik özelliklerini daha açık bir şekilde görmek için, değişken üslü doğrusal olmayan eliptik problemler için iyi bilinen çözüm kavramları tanıtılacak ve (4.2.1) denkleminin nasıl yorumlanabileceğini tartışılacaktır. Başlangıç olarak, eğer α p sabitse, o zaman (4.2.1) Dirichlet sınır değeri problemi $W_0^{1,p}(\Omega)$ klasik Sobolev uzayında iyi konumlandırılmıştır. Değişken ölçülebilir α için, bu problemin çözümü

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega) := \{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) \mid |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ veya } \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx < +\infty \}$$

Sobolev-Orlicz uzayında aranır ve bu uzayın üzerinde $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ olmak üzere

$$\| u \|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N}$$

normu vardır.

Burada, $L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ uzayı, tüm ölçülebilir, vektör değerli ve

$$\rho_{p(x)}(f) = \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ fonksiyonların denklik sınıflarının vektör uzayıdır ve bu uzaya değişken üslü Lebesgue uzayı denir. Ayrıca $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ olmak üzere

$$\| f \|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N} = \inf \{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} |\lambda^{-1} f|^{p(x)} dx \leq 1 \}$$

ile tanımlı $\| \cdot \|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N}$ fonksiyonu $L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ üzerinde bir normdur (Luxemburg norm) ve bu norma göre bir Banach uzayıdır.

Klasik Sobolev uzaylarının aksine, düzgün fonksiyonların $W = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında genel olarak yoğun olmadığı iyi bilinmektedir. Dolayısıyla, değişken α $p = p(x)$ ($1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty$) ile aşağıda tanımlanan $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ test

fonksiyonlar uzayının kapanışı olan $H = H_0^{1,p(x)}(\Omega)$ bir Sobolev uzayı ilişkilendirilmiştir.

Her zaman $W = H$ özdeşliği geçerli olmadığından, eğer $C_0^\infty(\Omega)$ kümesi $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğunsa $p(x)$ üssünün düzenli (regular) olduğu ortaya çıkar.

4.2.1.Tanım. Bir $y \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)-2} (\nabla y, \nabla \varphi) dx = \int_{\Omega} (f, \nabla \varphi) dx \quad (4.2.4)$$

integral özdeşliğini her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için sağlarsa, bu y fonksiyonuna (4.2.1) sınır değer probleminin bir zayıf çözümü denir.

Burada $(.,.)$ sembolü $\mathbb{R}^N$ de skaler çarpımı temsil etmektedir. Ayrıca $C_0^\infty(\Omega)$ kümesinin $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğunluğunu bazı düzensiz (irregular) değişken $p(x)$ üsler için kaybedebileceğimizden, (4.2.1) probleminin zayıf bir çözümünün genel olarak tek olmadığı sonucu çıkar. Dahası, Zhikov (2009), tüm zayıf çözümlerin kümesi

$$(\mathcal{A}u, v) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u, \nabla \varphi) dx, \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

eşitliğiyle verilen $\mathcal{A}: W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ operatörüne rağmen zorunlu olarak dışbükey değildir. Bu kümenin $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayında zayıf kapalı olup olmadığı sorusu açık kalmaktadır. Aynı zamanda, aşağıdaki sonuç bilinmektedir.

4.2.2.Teorem (Zhikov, V. V., 2011). Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesi yeterince düzgün ve (4.2.2) deki β sabiti

$$\begin{cases} \beta < \frac{\alpha(N-1)}{N-1-\alpha}, & \alpha < N-1, \\ \beta < +\infty, & \alpha \geq N-1, \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlarsa, (4.2.1) Dirichlet problemi aşağıdaki

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega} (f, \nabla y)_{\mathbb{R}^N} dx \quad (4.2.5)$$

enerji eşitsizliğini sağlayan bir $y \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ zayıf çözümü vardır.

4.2.3.Açıklama. 4.2.2.Teoreminin ispatının ana fikri, Dirichlet problemi (4.2.1) için bazı zayıf çözümlerin, $p = p(x)$ üssünün C^1 -düzenlemesi veya $\mathcal{A}$ operatörünün $\varepsilon \Delta_\beta$ -Laplasyan ile pertürbasyonu kullanılarak bir tür yaklaştırılması yoluyla elde edilebileceği gerçeğine dayanmaktadır. Burada, $y \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ zayıf bir çözümün elde edilebilirliği

ile, y_ε daha düzenli' sınır değer problemlerinin çözümleri olan ve $y_\varepsilon \rightarrow y$ nin uygun bir topolojide ε sıfıra yaklaştığı bir $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ dizisinin varlığını kastediyoruz. Ancak, enerji eşitsizliğinin (4.2.5) bazı düzensiz değişken üsler $p(x)$ için kesin olabilmesi nedeniyle, Dirichlet problemi (4.2.1) için her zayıf çözümün bu şekilde elde edilip edilemeyeceği bilinmemektedir.

Bunu için $p(x)$ bir üs ve V kümesi, H ile W arasında keyfi bir ara uzay, yani $H \subseteq V \subseteq W$ olsun.

4.2.4.Tanım. Bir $y \in V$ fonksiyonu için, integral özdeşliği (4.2.4) her $\varphi \in V$ için geçerli ise bu y fonksiyonu (4.2.1) probleminin bir V çözümü veya φ -varyasyonel çözümüdür. Doğrusal olmayan $\mathcal{A}: W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1,p(x)}(\Omega))^*$ operatörünün kesin (strict) monotonluğunu kullanarak, bir V çözümünün var olduğunu ve tek olduğunu göstermek kolaydır. Dahası, V çözümler durumunda, (4.2.4) deki test fonksiyonu φ çözüme eşit alınabildiğinden, bu bizi

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)} dx = \int_{\Omega} (f, \nabla y) dx \quad (4.2.6)$$

enerji eşitliğine götürür

4.2.5.Teorem. V kümesi, H ile W arasında keyfi bir ara uzay olsun. O zaman herhangi bir $f \in (L^\infty(\Omega))^N$ için, (4.2.1) sınır değeri probleminin tek bir V -çözümü vardır ve bu çözüm (4.2.6) enerji eşitliğini sağlar.

Bunun tersi de doğrudur.

4.2.6.Önerme. 4.2.1.Tanım anlamında zayıf bir çözüm, ancak ve ancak enerji eşitliği (4.2.6) geçerliyse varyasyoneldir.

Gerçekten de, bu durumda V kümesini $C_0^\infty(\Omega)$ ve çözümün kendisini içeren en küçük kapalı alt uzay olarak alınır. Eğer $V = H$ alınırsa, H -çözümlerden bahsedilir. (4.2.1) için zayıf bir çözümün başka bir tanımını aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

4.2.7.Tanım. Bir $y \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu

$$\int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)-2} (\nabla \varphi, \nabla \varphi - \nabla y) dx \geq \int_{\Omega} (f, \nabla \varphi - \nabla y) dx \quad (4.2.7)$$

integral özdeşliğini her $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu için sağlarsa, bu y fonksiyonuna (4.2.1) sınır değeri probleminin Minty anlamında bir zayıf çözümü denir.

Bu tanımdan, Minty anlamında zayıf çözümler kümesinin dışbükey ve kapalı olduğu sonucu çıkar. Ancak, 4.2.1. ve 4.2.7. Tanımları arasındaki ilişkiler, genel bir $p(x) \in \mathcal{P}_{ad}$ için oldukça karmaşıktır. En azından, Minty'nin zayıf çözümlerinin her birinin integral özdeşliğini (4.2.4) sağladığını veya tam tersini iddia edemeyiz. Şimdi, zayıf çözümlerin üç kavramının çakışmadan önce verildiği durumu açıklıyoruz. Sonuç olarak, optimal kontrol problemi (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) varyasyonel formülasyonu farklı biçimlerde ifade edilebilir ve bu, ilgili çözüm kümesinin seçimine bağlıdır. Bu nedenle, (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) problemi için kabul edilebilir çiftlerin aşağıdaki kümelerini belirtiyoruz:

$$\mathcal{Z}_w := \{ (p, y) \in \mathcal{P}_{ad} \times W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid y \text{ ve } p, (4.2.4) \text{ eşitliğine aittir, } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \} \quad (4.2.8)$$

$$\mathcal{Z}_v := \{ (p, y) \in \mathcal{P}_{ad} \times V \mid H_0^{1,p(x)}(\Omega) \subseteq V \subseteq W_0^{1,p(x)}(\Omega), y \text{ ve } p, (4.2.4) \text{ eşitliğine aittir, } \varphi \in V \} \quad (4.2.9)$$

$$\mathcal{Z}_M := \{ (p, y) \in \mathcal{P}_{ad} \times W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid y \text{ ve } p, (4.2.7) \text{ eşitliğine aittir, } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \} \quad (4.2.10).$$

Ancak, Lavrentieff etkisi nedeniyle, ilgili

$$\langle \inf_{(p,y) \in \mathcal{Z}_w} J(p, y) \rangle, \langle \inf_{(p,y) \in \mathcal{Z}_v} J(p, y) \rangle \text{ ve } \langle \inf_{(p,y) \in \mathcal{Z}_M} J(p, y) \rangle \quad (4.2.11)$$

minimizasyon problemlerinin genel olarak esasen farklı olması mümkündür. Özellikle, (4.2.11) problemlerinin optimal çiftlerinin de farklı olabileceği anlamına gelir.

Bu nedenle, bu bölümde cevaplayacağımız temel soru, kabul edilebilir çözümler kümesinin farklı seçimlerine göre optimal kontrol problemi (1.1)-(1.4)'ün çözülebilirliğidir. Yazarların bilgisi dahilinde, (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) problemleri için optimal çiftlerin varlığı literatürde incelenmemiştir.

4.3. Orlicz ve Sobolev Üzerine Ön Bilgiler – Orlicz Uzayları

Öncelikle, $L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ uzayının hem

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N} = \inf\{\lambda > 0: \int_\Omega |\lambda^{-1}f|^{p(x)} dx \leq 1\} \quad (4.3.1)$$

Luxemburg normuna hem de $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ (eşlenik üs fonksiyonu) olmak üzere

$$\|f\|_{O^{p(\cdot)}(\Omega)^N} = \sup\left\{\int_\Omega (f, g) dx: \int_\Omega |g|^{p'(x)} dx \leq 1\right\} \quad (4.3.2)$$

Orlicz normuna göre yansılmalı ve ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

Eğer (4.2.2) göz önüne alınırsa, h. h. h. $x \in \Omega$ için $1 \leq \frac{\beta}{\beta-1} = \beta' \leq p'(x) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} = \alpha'$ eşitsizliği elde edilir.

4.3.1.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Eğer $\rho_{p(x)}(f) > 0$ ise (4.3.1) deki en düşük değer (infimum) elde edilir. Ayrıca $\lambda_* = \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N} > 0$ ise $\rho_{p(x)}(\lambda^{-1}f) = 1$ elde edilir.

4.3.2.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ ve $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)^N$ ise $(f, g) \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_{\Omega} (f, g) dx \leq 2 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(\Omega)^N}$$

Hölder eşitsizliği sağlanır.

4.3.3.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Aşağıdaki yaklaşımlar $L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ uzayında geçerlidir:

$$1) \text{ Her } f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^N \text{ için } \|f\|_{L^{\alpha}(\Omega)^N} \leq (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N}. \quad (4.3.3)$$

$$2) \text{ Her } f \in L^{\beta}(\Omega)^N \text{ için } \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N} \leq (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{\beta'}} \|f\|_{L^{\beta}(\Omega)^N}. \quad (4.3.4)$$

Daha ileri analizimiz için aşağıdaki sonuçlardan yararlanacağız.

4.3.4. Yardımcı Önerme (Zhikov (2011)). Eğer bir $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ uzayında sınırlı ve $f_k \rightarrow f$ zayıf yakınsaması $k \rightarrow \infty$ için $L^{\alpha}(\Omega)^N$ uzayında varsa, bu takdirde her $\varphi \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)^N$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_k, \varphi) dx = \int_{\Omega} (f, \varphi) dx$$

limiti gerçekleşir, yani $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ uzayında f fonksiyonuna zayıf yakınsar.

4.3.5. Yardımcı Önerme (Fan ve Zhao (2001)). $k = 1, 2, \dots$ için $f, f_k \in L^{p(\cdot)}(\Omega)^N$ olsun.

Bu taktirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)^N} = 0;$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k - f|^{p(x)} dx = 0;$$

(iii) Ω kümesindeki her noktada $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi f fonksiyonuna ölçüm içinde yakınsar ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_k|^{p(x)} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f|^{p(x)} dx$$

limiti elde edilir.

Bu alt bölümün sonunda, ileride faydalı olacak birkaç sonucu verelim.

4.3.6.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). $p(x) \in \wp_{ad}$ ve $y(\cdot) \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyonları verilsin. Yine $\mathcal{F}(\varphi) = F(\varphi) = |\nabla \varphi|^{p(x)-2}(\nabla \varphi, \nabla \varphi - \nabla y)$ ile verilen $\mathcal{F}$ dönüşümü $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayından $L^1(\Omega)$ uzayına tanımlıdır.

4.3.7.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). $\mathcal{F}: W_0^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ dönüşümü süreklidir.

4.4. Kabul Edilebilir Çözüm Kümelerinin Bazı Yardımcı Sonuçları ve Özellikleri

İyi bilinen sonuçlar nedeniyle (örneğin, Zhikov, V. V. 2010'ye bakınız), sonsuz sayıda zayıf çözüme izin veren (4.2.1) sınır değer problemine karşılık gelen $p(x) \in \wp_{ad}$ kabul edilebilir kontrol olarak gösterilebilir. Dolayısıyla, (4.2.8)-(4.2.9)-(4.2.10)'da tanımlanan kabul edilebilir çözümler kümeleri $\mathcal{Z}_w$, $\mathcal{Z}_v$ ve $\mathcal{Z}_M$ 'nin genel olarak büyük ölçüde farklı özelliklere sahip olmasını beklemek makuldür.

Bu bölüme, $\mathcal{Z}_w$, $\mathcal{Z}_v$ ve $\mathcal{Z}_M$ kümelerinin OCP (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) e göre aynı kabul edilebilir çift koleksiyonunu tanımladığı durumla başlıyoruz.

4.4.1.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Eğer kabul edilebilir kontrol kümesi olan $\mathcal{P}_{ad}$ nin her $x, y \in \Omega$ için

$$(i) |x - y| \leq \frac{1}{2},$$

$$(ii) 1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta, w(t) = \frac{k_0}{\ln(t^{-1})},$$

$$(iii) |p(x) - p(y)| \leq w(|x - y|)$$

koşullarını sağladığını kabul edelim. Bu taktirde Z_w , Z_v ve Z_M kümeleri çakışır.

4.4.2.Tanım (Kogut ve Tkachenko (2016)). İki kısıtlı en aza indirme problemleri

$$\langle \inf_{(p,y) \in Z_w} J(p,y) \rangle \text{ ve } \langle \inf_{(p,y) \in Z_v} J(p,y) \rangle \quad (4.4.1)$$

arasında bir boşluk varsa, yani

$$J(\tilde{p}^0, \tilde{y}^0) = \inf_{(p,y) \in Z_w} J(p,y) < \inf_{(p,y) \in Z_v} J(p,y) = J(\hat{p}^0, \hat{y}^0) \quad (4.4.2)$$

olacak şekilde $(\tilde{p}^0, \tilde{y}^0) \in Z_w$ ve $(\hat{p}^0, \hat{y}^0) \in Z_v$ iki çift varsa Lavrentiev olgusu OCP (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) probleminin doğasında vardır.

(4.4.1) problemlerinin çözümlerinin, genel olarak, Lavrentiev etkisinin de dahil edilmesi koşuluyla, düzgünlük anlamında farklı olduğunu belirtmek ilginçtir. Özellikle, optimal durum $\tilde{y}^0$, V uzayına ve dolayısıyla $H_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 'a ait olamaz. Bu nedenle, Z_w , Z_v ve Z_M kümelerinin ileride faydalı olacak birkaç karakteristik özelliğini belirtebiliriz.

4.4.3. Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Kabul edilebilir kontrol kümesi olan $\mathcal{P}_{ad}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $Z_v \subset Z_w$, ve $Z_v \subset Z_M$ kapasama özellikleri vardır;

(ii) Z_w , Z_v ve Z_M kümeleri boştan farklıdır;

(iii) Z_M kümesi y ye göre konveksdir;

(iv) Eğer $\{(p_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Z_M$ çiftler dizisi h.h.h. $x \in \Omega$ için $p_k(x) \rightarrow p(x)$, $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ uzayında $k \rightarrow \infty$ için $y_k \rightarrow y$ zayıf yakınsaması ve $y \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ özelliklerinin sağlarsa, $(p, y) \in Z_M$ olur.

4.4.4.Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Kabul edilebilir kontrol kümesi olan $\mathcal{P}_{ad}$ (4.2.2) deki dibi verilsin. Bu taktirde $\emptyset \neq Z_V \subset Z_M$, ve $Z_M \setminus Z_V \neq \emptyset$ kapsama özellikleri sağlanır.

Bu bölümün sonunda Z_W , Z_V ve Z_M arasındaki ilişkinin genel olarak çok karmaşık bir problem olduğunu belirtmekte fayda var. Özellikle, $Z_V \subset Z_M$ olup olmadığı veya tam tersi bilinmemektedir. $(p, y) \in Z_M$ ise ve bu çift (4.2.6) enerji eşitliğiyle ilişkilirse, $(p, y) \in Z_V$ olduğunu bile iddia edemeyiz. Ayrıca, Z_W kümesinin kompaktlık, kapalılık vb. gibi standart topolojik özellikleri hakkında da açık bir soru bulunmaktadır. Dahası, [Zhikov, V. V. (2009), s. 107-112]'de gösterildiği gibi, Z_W kümesi genel olarak dışbükey değildir. Dolayısıyla, klasik monoton problemlerde tek olmamanın mümkün olduğu standart durumun aksine, bu durum genellikle karşılık gelen operatörün kesin dışbükeyliğinin eksikliğinden kaynaklanırken, çözüm kümesi dışbükey ve kapalıdır. (4.2.1) sınır değer problemi durumunda, karşılık gelen $\mathcal{A}: W_0^{1, \hat{p}(x)}(\Omega) \rightarrow (W_0^{1, \hat{p}(x)}(\Omega))^*$ operatörü kesinlikle monotondur. Dolayısıyla, tek ve dışbükeylik olmama tamamen farklı niteliktedir.

4.5. Optimal Kontrol Probleminin Çözülebilirliği Üzerine

4.5.1.Tanım. Bir $BV(\Omega)$ kümesi $L^1(\Omega)$ daki

$$\|p\|_{BV(\Omega)} = \|p\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Dp|$$

$$= \|p\|_{L^1(\Omega)} + \sup \left\{ \int_{\Omega} p \operatorname{div} \varphi dx : \varphi \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N), |\varphi(x)| \leq 1, x \in \Omega \right\} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı olarak tanımlanır.

Şimdi	Dirichlet	p(x)-Laplacian	sınır	değer	problemi
		$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla y ^{p(x)-2} \nabla y) = -\operatorname{div} f, & x \in \Omega, \\ y = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$			(4.5.1)

ve p(x) değişken üs kontrol fonksiyonu için kabul edilebilir küme (admissisble set)

$$p(x) \in \hat{\mathcal{P}}_{ad} = \{p \in BV(\Omega) : \text{h. h. h. } x \in \Omega \text{ için } 1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < +\infty\} \quad (4.5.2)$$

kısıtlarına karşılık gelen Optimal Kontrol Problem (OCP)

Minimize

$$\{J(p, y) = \int_{\Omega} |y(x) - y_d|^\alpha dx + \gamma \int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)} dx + \int_{\Omega} |p(x) - p_d|^2 dx + \int_{\Omega} |Dp|\} \quad (4.5.3)$$

optimal kontrol probleminin çözümünü tartışıyoruz.

Şimdi (4.5.1)- (4.5.2)- (4.5.3) OCP problemine karşılık gelen kabul edilebilir çözümlerin kümesi

$$\hat{\mathcal{Z}}_M = \{ (p, y) \in \hat{\mathcal{P}}_{ad} \times W_0^{1,p(x)}(\Omega) \mid y \text{ ve } p, (4.2.7) \text{ eşitliğine aittir, } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \} \quad (4.5.4)$$

tanımlayalım. Ayrıca her $(p, y) \in \hat{\mathcal{Z}}_M$ için $J(p, y) < \infty$ olduğu hemen görülür.

4.5.2. Yardımcı Önerme (Kogut ve Tkachenko (2016)). Eğer $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \hat{\mathcal{P}}_{ad}$ ve $\{y_k \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla $BV(\Omega)$ uzayında $p_k(x) \xrightarrow{*} p(x)$ ve $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ uzayında $k \rightarrow \infty$ için $y_k \rightharpoonup y$ olsun. Bu takdirde

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla y_k|^{p_k(x)} dx \geq \int_{\Omega} |\nabla y|^{p(x)} dx$$

limiti vardır.

4.5.3. Teorem (Kogut ve Tkachenko (2016)). Eğer $p_d \in L^2(\Omega)$, $y_d \in L^\alpha(\Omega)$ ve $f \in L^\infty(\Omega)^N$ olsun. Bu takdirde (4.5.1)-(4.5.2)-(4.5.3) (OCP) optimal kontrol probleminin Minty anlamında en azından bir zayıf çözümü vardır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının büyük bir kısmını oluşturan $L^{p(x)}(\Omega)$ değişken üslü Lebesgue ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ Sobolev uzaylarının ağırlık fonksiyonu yardımıyla daha genel durumları tanımlanarak, temel özellikleri incelenebilir. Ayrıca ağırlıklı, homojen ve doğrusal olmayan $p(x)$ -Laplacian (Dirichlect) denklemlerinin zayıf çözümleri varyasyonel yöntemler yardımıyla araştırabilir. Diğer taraftan ağırlıklı (4.2.1)-(4.2.2)-(4.2.3) optimal kontrol problemi ve kısıtları yeniden verilerek, problemin optimal çözümleri incelenebilir.



KAYNAKLAR

- Adams, R. A., & Fournier, J. J. (2003). *Sobolev Spaces* (Vol. 140). Elsevier.
- Aydin, İ. (2012). Weighted Variable Sobolev Spaces and Capacity. *Journal of Function Spaces*, 2012(1), 132690.
- Aydin, İ. (2012). *On Variable Exponent Amalgam Spaces*.
- Burenkov, V. I. (1998). *Sobolev Spaces on Domains* (Vol. 137). Stuttgart: Teubner.
- Ciarlet, P. G. (2025). Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications. *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- Fan, X. L., & Zhang, Q. H. (2003). Existence of Solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet Problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 52(8), 1843-1852.
- Fan, X., Zhang, Q., & Zhao, D. (2005). Eigenvalues of $p(x)$ -Laplacian Dirichlet Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 302(2), 306-317.
- Hryniv, V. (2009). Optimal Boundary Control for a Time Dependent Thermistor Problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, No. 83, 1–22.
- Hudzik, H. (1983). Uniform Convexity of Musielak-Orlicz Spaces with Luxemburg's Norm. *Commentationes Mathematicae*, 23(1).
- Kogut, P. I., & Tkachenko, P. I. (2016). On Optimal Control Problem for Nonlinear Elliptic Equation with Variable $p(x)$ -Laplacian. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications*, 24(8), 71-92.
- Fucik, S., John, O., & Kufner, A. (1977). *Function Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden.
- Mihăilescu, M., & Rădulescu, V. (2007). On a Nonhomogeneous Quasilinear Eigenvalue Problem in Sobolev Spaces with Variable Exponent. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(9), 2929-2937
- Musielalc, J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. *Lecture Notes in Math*, 1034.
- Yamamuro, S. (1953). Exponents of Modular Semi-Ordered Linear Spaces. *Journal of Faculty of Science, Hokkaido University. Series I. Mathematics*, 12(4), 211-253.
- Sobolev, S. L. (1938). On a Theorem of Functional Analysis. *Mat. Sbornik*, 4, 471-497.
- Zhikov, V. V. (2011). On Variational Problems and Nonlinear Elliptic Equations with Nonstandard Growth Conditions. *Journal of Mathematical Sciences*, 173(5), 463-570.
- Zhikov, V. V. (2010). On the Weak Convergence of Fluxes to a Flux. *Dokl. Math.* 81, 58–62.
- Zhikov, V. V. (2009). On the Technique for Passing to the Limit in Nonlinear Elliptic Equations. *Functional Analysis and Its Applications*, 43(2), 96-112.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emre AYDIN

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Bilgileri

Lise : Necip Fazıl Kısakürek Anadolu Lisesi,2016

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik
Bölümü,2021

Mesleki Deneyim

İş Yeri : Milli Eğitim Bakanlığı Samsun Boğaziçi Anadolu Lisesi Matematik
Öğretmeni, 2021-...

Yayın Listesi :